Programa de Pós-Graduação em Educação
Universidade do Estado do Pará
Belém-Pará- Brasil

Revista Cocar. V.21 N.39/2024 p.1-22 ISSN: 2237-0315

Potências de um número inteiro: uma propriedade curiosa

Powers of an integer: a curious property

Gilberto Gonçalves de Sousa
Universidade do Estado do Pará (UEPA)
Lucas Morais do Nascimento
Secretaria de Educação do Pará (SEDUC-PA)
Belém-PA/Brasil

Resumo
O presente artigo tem como objetivo apresentar demonstrações alternativas para proposições específicas envolvendo números inteiros e propriedades da potenciação. Utiliza-se o método da indução matemática, apresentando suas dificuldades e possibilidades dentro da matemática e suas tecnologias. O interesse por este tema surgiu por meio da necessidade em se aprofundar o estudo de Teoria dos Números, com ênfase nas demonstrações, visto que vivemos num contexto educacional onde é preciso atender e usufruir de novas propostas. Logo, a utilização das demonstrações assim como o estudo delas, surgem como um desafio que precisa ser superado no setor educacional. Deste modo, utilizamos a pesquisa bibliográfica para dar ênfase em nossas análises e conseguinte apresentamos alternativas para algumas demonstrações de inteiros. Portanto, acreditamos que este estudo proporciona grandes potencialidades sobre a importância das demonstrações matemáticas, além da sua compreensão de modo que alunos e professores desta área de conhecimento sejam beneficiados.
Palavras-chave: Teoria dos Números; Demonstrações; Indução Matemática.

Abstract
This article aims to present alternative demonstrations for specific propositions involving integers and potentiation properties, using the method of mathematical induction, presenting their difficulties and possibilities within mathematics and its technologies. The interest in this topic arose through the need to deepen the study of Number Theory, with an emphasis on demonstrations, since we live in an educational context where it is necessary to attend to and take advantage of new proposals, therefore the use of demonstrations as well as the study of them, emerges as a challenge that needs to be overcome in the educational sector. In this way, we use bibliographical research to emphasize our analyzes and therefore present alternatives for some demonstrations of integers. Therefore, we believe that this study provides great potential on the importance of mathematical demonstrations beyond their understanding so that students and teachers in this area of knowledge benefit.
Keywords: Number Theory; Demonstrations; Mathematical Induction.

1. Introdução

O estudo das potências inicia-se na educação infantil, mais precisamente no 4º ano, segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018). E tal assunto estende-se por todo o ensino fundamental, observando as recomendações presentes no documento oficial.

Na unidade temática números, dentre os objetos de conhecimento, encontram-se "Composição e decomposição de um número natural de até cinco ordens, por meio de adições e multiplicações por potências de 10" (4º ano), "Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais" e "Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais" (6º ano), cujas seguintes habilidades se relacionam: (EF04MA02), (EF06MA03), (EF06MA11), (EF06MA12). O mesmo assunto se faz presente nos objetos de conhecimento das séries posteriores, tais como 8º e 9º anos, que articulam as habilidades: (EF08MA01), (EF08MA02), (EF09MA03).

O assunto de potenciação se relaciona com diversos temas da matemática. Entende-se, assim, que essa operação matemática e suas propriedades permitem desde a simplificação de expressões matemáticas à modelagem de situações-problemas do cotidiano, contudo, é comum observar que alunos do ensino fundamental apresentem dificuldades no estudo desse conteúdo (Batista; Santiago, 2023). Tendo isso em vista, percebe-se que o estudante da educação básica precisa mobilizar tais conhecimentos considerando suas aplicações futuras, uma vez que "[...] o fato de não estudar um determinado assunto em seu período adequado pode desencadear dificuldades por parte dos alunos em aprender o conteúdo seguinte [...]" (Ramos *et al.*, 2022, p. 9). Também o diálogo estabelecido entre Sousa *et al.* (2016) e Silva, Gonçalves e Medeiros (2017), evidencia que o assunto de potenciação envolve muitos outros, e que por vezes os alunos da educação básica apresentam dificuldades em compreendê-lo.

Contudo, o que vem a ser potenciação? Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1998), constata-se que "O conceito de potenciação com os números naturais pode ser trabalhado por meio de situações que envolvam multiplicações sucessivas de fatores iguais, que são freqüentes por exemplo, nos problemas de contagem [...]" (p. 112). Nas palavras de Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (1998), "Dado um inteiro real *a* e um número natural *n*, $n \neq 0$, a expressão a^n, denominada *potência*, representa um produto de *n* fatores iguais ao número real *a*" (p. 10). É possível complementar essa ideia dizendo que "[...] a potenciação é uma forma sintética de representações de multiplicações repetidas [...]"

(Ramos *et al.*, 2022, p. 2). Em acréscimo, Andrini e Vasconcellos (2015) asseguram que potenciação é "Uma multiplicação de fatores iguais [...]" (p. 79).

A partir dessas premissas, pode-se entender potenciação como uma forma resumida da escrita de uma multiplicação/produto cujos fatores são iguais, com vistas a simplificação de uma ou mais expressões matemáticas.

No âmbito dessa discussão, enfatiza-se que o presente estudo explana acerca de uma das propriedades de potência presentes no conjunto dos números inteiros positivos, mais especificamente no que diz respeito aos critérios de divisibilidade.

Por experiência prévia, pode-se dizer que o estudo dos números inteiros e suas propriedades é mais amplamente explanado durante a disciplina teoria dos números, presente nos cursos de graduação em matemática. Em referência a essas constatações, Oliveira e Fonseca (2017) ressaltam que o estudo dos inteiros positivos, em teoria dos números, é essencial na formação dos professores de matemática.

Em relação a formação de professores, Shulman (1986) destacou que na década de 70 havia uma maior ênfase no domínio do conteúdo a ser lecionado, incluindo suas teorias, métodos, entre outros. Entretanto, nos anos 80, as abordagens metodológicas ganham importância e as preocupações com o conteúdo ensinado ficam um tanto negligenciadas. Essa falta de atenção ao conteúdo, tanto na formação dos professores quanto nas pesquisas sobre ensino, fora denominada pelo autor como o problema do "paradigma perdido"

Nesse contexto Shulman (1986) destaca que é de extrema importância compreender o conteúdo específico da matéria que o professor leciona, o que inclui o entendimento de processos, métodos e procedimentos da área específica. Logo entendemos que um estudo que apresente uma abordagem de demonstrações diferenciadas colabora tanto na formação do professor de matemática quanto no enriquecimento de estudos que abordem estes conceitos.

Deste modo, o objetivo deste trabalho é apresentar demonstrações alternativas para proposições específicas envolvendo números inteiros e propriedades da potenciação, utilizando o método da indução matemática. Vale ressaltar que a demonstração por indução matemática é uma escolha metodológica consciente e não a única abordagem possível. Há outros métodos de verificação e demonstração para conjecturas matemáticas, como por exemplo: a prova direta, demonstração por contraposição, demonstração por redução ao absurdo, demonstração por contraexemplo, todavia, delimitaremos nossas discussões ao tema inicial.

Para o desenvolvimento deste estudo, utilizou-se o método bibliográfico, com uso de demonstrações matemáticas. A perspectiva de Gil (2002), à semelhança do que afirmam Marconi e Lakatos (2003), é que a pesquisa bibliográfica é realizada com base em materiais já elaborados, examinando cuidadosamente as informações para não comprometer a qualidade da investigação. Também não é a simples repetição do que já foi dito sobre um certo assunto, pelo contrário, aplica-se em analisar um tema sob uma nova abordagem.

Nessa perspectiva, entende-se que explorar a indução matemática na educação básica, por meio das demonstrações, aproxima-se das diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e suas competências gerais, na medida em que contribui para o desenvolvimento da criticidade e argumentação lógica, bem como na criatividade e resolução de problemas, elementos fundamentais na formação dos estudantes. Daí a necessidade de aprimorar a compreensão de demonstrações matemáticas entre professores e alunos.

Quanto a estruturação metodológica, este trabalho está organizado em cinco partes. A primeira é esta breve síntese do que será dissertado no decorrer do texto. A seguir, na segunda seção, apresentam-se os aspectos teóricos da pesquisa. Na terceira seção, uma breve discussão sobre o conceito de indução matemática no cotidiano. Por conseguinte, na quarta seção, discutiremos acerca das propriedades de potência presentes no conjunto dos números inteiros, principalmente no que relaciona a uma de suas propriedades. Nesta mesma seção pretende-se apresentar demonstrações alternativas para proposições frequentemente encontradas em livros de teoria dos números, para isso utilizaremos o método da indução matemática. Por fim, remataremos as discussões do trabalho caminhando para o encerramento nas considerações finais.

2. Teoria dos Números e o Método da Indução Matemática

É válido ressaltar que é impossível provar tudo, ou seja, não se pode demonstrar todas as coisas. Existe um grupo de ideias de onde devemos partir, que são os princípios fundamentais, os postulados ou axiomas. Dentro dessa perspectiva, Coutinho (2003) relata que foi a partir da obra de Euclides, denominada "Os elementos", que os estudiosos passaram a estabelecer a demonstração para as proposições matemáticas.

Segundo Balacheff (1988) a demonstração é um conjunto de proposições válidas e estruturadas de acordo com certas regras, considerando que as proposições são tidas como verdadeiras ou são derivadas e verificadas por meio de argumentos lógicos.

Assim, dentre as possíveis formas de demonstrar, destaca-se o método da indução matemática. A perspectiva de Silva *et al.* (2022) aproxima-se de Fossa (2021) ao afirmar que o método da indução matemática é um dos mais importantes métodos de demonstrações empregado na verificação de conjecturas e propriedades relativas aos números naturais. Silva e Almeida (2022) afirmam que, no campo da matemática, muitas descobertas são feitas empiricamente e que, sendo assim, o método da indução torna-se muito útil na verificação dos resultados obtidos, além do que, por se tratar de uma ferramenta extremamente versátil, em função de suas aplicações em diferentes problemas, permite estabelecer demonstrações matemáticas rigorosas.

De acordo com Freitas (2013), a indução matemática é usada, principalmente, para situar verdades matemáticas exatas em subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ (conjunto dos naturais). Diante disso, não incide em mostrar que determinada sentença aberta é verdadeira para muitos casos, todavia, trata-se de mostrar que tal sentença é verdadeira para todo número natural $n \geq a$, onde $a \in \mathbb{N}$.

O método de indução matemática é bastante simples, como visto em Filho (1981), Aires (2015) e Bezerra (2018): seja p(n) uma proposição associada a cada inteiro positivo *n* e que satisfaz as duas seguintes propriedades: p(1) é verdadeira; para todo inteiro positivo *n*, se p(n) é verdadeira, então p(n+1) também é verdadeira. Nessas condições, a proposição p(n) é verdadeira para todo inteiro positivo *n*. Ou seja, realizar uma demonstração por meio da indução matemática consiste em provar que uma proposição é verdadeira para um caso inicial e, verificada essa etapa, mostrar que, se vale para um certo *n*, também vale para o seu sucessor.

Segundo Silva *et al.* (2022), a indução matemática "[...] é um método utilizado para demonstrar a veracidade de um dado número que tem propriedade e que seu sucessor também a possui, e assim sucessivamente [...]" (p. 1). Conforme Silva e Almeida (2022), a indução matemática "[...] é uma ferramenta poderosíssima na demonstração de proposições sobre o conjunto dos números naturais, tendo aplicações em uma gama de problemas, tais como identidades, desigualdades, divisibilidade, recorrências, etc. [...]" (p. 64). Para Amorim, Santos e Santos (2020, p. 41), a indução matemática "[...] é um método de demonstração que é trabalhado principalmente nos cursos de Álgebra, Matemática Discreta ou de Teoria dos Números, possui inúmeras aplicações em todas as áreas da matemática. [...]" .

Concordamos com Oliveira e Fonseca (2017) ao enfatizarem a relevância da teoria elementar dos números na formação de professores de matemática, além do mais, "A Teoria dos Números, que tem parte do seu conteúdo conhecido na escola básica como aritmética, assim como as primeiras noções de geometria, são as portas de entrada das pessoas para a cultura matemática [...]" (p. 882). Não obstante, há evidências de que tal assunto tem sido, por vezes, negligenciado. Por isso, os mesmos autores asseveram: "[...] Em que pese a pouca evidência dada ao tema, sua importância é inegável, uma vez que, considerando a mais óbvia das razões, pode-se identificar elementos da aritmética básica por toda parte [...]" (p. 882).

A comunicação estabelecida entre Almouloud, Figueroa e Fonseca (2021) e Silva *et al.* (2022) evidencia a importância dos conhecimentos construídos em teoria dos números na formação de professores de matemática, bem como no currículo da educação básica. No mesmo sentido, Oliveira e Fonseca (2017) asseguram que os conceitos estudados em teoria dos números são por diversas vezes "[...] vistos como óbvios, muito simples, fáceis, a tal ponto que a necessidade de estudá-los em profundidade tem sido praticamente ignorada nos programas de formação dos professores de Matemática nos cursos de Licenciatura no Brasil [...]" (p. 896).

Ampliando a discussão compreendida, Caldato, Utsumi e Nasser (2018) afirmam que "Aparentemente a demonstração na licenciatura não consiste num objeto de estudo, mas se limita a uma mera ferramenta para os licenciandos, isto quando numa disciplina de conteúdo específico algum resultado é demonstrado pelo professor" (p. 76). Mas afinal, o que vem a ser uma demonstração matemática? Segundo Batistela, Bicudo e Lazari (2020, p. 204), "[...] uma demonstração é a prova da existência matemática de algo [...]". Nesse aspecto, "A demonstração pode ser considerada como uma sequência de argumentos que seguem regras da lógica para mostrar que um enunciado é verdadeiro quando se assume certos axiomas, definições e teoremas já demonstrados [...]" (Nóbriga, 2019, p. 9).

Sabe-se que em demonstração matemática a argumentação é essencial. No que concerne à demonstração por indução não é diferente, todas as etapas devem seguir uma construção lógica, bem fundamentada, a fim de garantir a veracidade das conclusões obtidas pelo método. Sobre esse assunto, concordamos com Batistela, Bicudo e Lazari (2020, p. 203) quando atestam que "Demonstrar ou provar em matemática não é uma atividade que se processa mecanicamente, ou seja, não há uma sequência de passos que possam ser dados em etapas por uma máquina em finitas operações que realize essa atividade [...]". Nesse viés, Mota e Carvalho (2011) reiteram a importância das demonstrações matemáticas na formação dos alunos da educação básica e, principalmente, do ensino superior, especialmente nos cursos de licenciatura em matemática, tendo em conta que "[...] uma demonstração exige certo domínio de argumentação, algo que, como futuro professor, irá lhe ser de grande valor na sala de aula" (p. 1). Entende-se, assim, que "[...] trabalhar com re-demonstrações e demonstrações alternativas é uma atividade importante a ser realizada com alunos em formação no âmbito da matemática" (Batistela; Bicudo; Lazari, 2020, p. 210).

Voltando aos dizeres de Silva *et al.* (2022), compreende-se que a abordagem do método de indução matemática é viável na educação básica à medida que se busca estimular a formulação e verificação de conjecturas, ao invés de simplesmente entregar as fórmulas prontas. Corroborando tal explanação, Amorim, Santos e Santos (2020) sugerem a introdução do método de indução matemática no ensino médio, de forma eficaz, a fim de validar teoremas e proposições matemáticas. Nessa leva, declaram que "O atual sistema de ensino brasileiro necessita de novas ideias e novas metodologias, que visem um melhor desempenho educacional. [...]" (p. 40).

Para Caldato, Utsumi e Nasser (2018), o ensino de provas e demonstrações quase não se faz presente na sala de aula da educação básica, seja no ensino fundamental, seja no ensino médio. Boa parte dos alunos sentem-se pouco motivados a aprender por meio deste recurso por não ser um assunto voltado para os conteúdos cobrados nos vestibulares e avaliações locais e, "[...] Além disso, quando raramente é utilizado em sala, tende a ser interpretado pelos discentes como uma mera curiosidade ou como um conhecimento que não favorece a aprendizagem" (p. 91-92). Diante disso, vê-se a necessidade de apreciar as demonstrações matemáticas no ensino básico.

3. A Indução Matemática no Cotidiano

Antes de apresentar as demonstrações, é bastante oportuno explanar o conceito de indução matemática com uma situação prática. Na tentativa de clarificar esse método, o qual será empregado a seguir. Um exemplo simples de indução matemática no cotidiano é o seguinte: qual a quantidade de cumprimentos (aperto de mãos) em uma reunião com n

pessoas? Tomemos como base que todas as pessoas se cumprimentem uma única vez e que ninguém fique de fora, além disso, o mínimo de aperto de mãos ocorre quando há duas pessoas, pois uma pessoa não pode cumprimentar a si mesma.

Seguindo esse raciocínio, percebe-se, também, que a ordem dos apertos de mãos não importa, já que a pessoa A cumprimentar a pessoa B é equivalente à pessoa B cumprimentar a pessoa A (considere a nomenclatura AB o mesmo que: a pessoa A cumprimenta a pessoa B, assim AB é o mesmo que BA). Logo, estamos diante de um problema que envolve combinação. Dessa feita, analisemos os casos iniciais: quando há 2 pessoas, ocorre exatamente 1 (um) aperto de mãos (AB); quando há 3 pessoas, ocorrem 3 (três) apertos de mãos (AB, AC e BC); quando há 4 pessoas, ocorrem 6 (seis) apertos de mãos (AB, AC, AD, BC, BD e CD); para 5 pessoas, ocorrem 10 (dez) apertos de mãos, e assim por diante. Nota-se que a quantidade de apertos de mãos está estritamente dependente da quantidade n de pessoas, isso nos leva a conjecturar que essa quantidade é $C_{n,2} = \frac{n!}{(n-2)!2!}$, em outros termos, é a combinação de n elementos tomados 2 a 2. O que é verdade, provaremos por indução:

Tomemos o caso inicial $n = 2$ (duas pessoas) (base de indução):

$$C_{2,2} = \frac{2!}{0!\,2!} = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

Como já tínhamos conhecimento, um único aperto de mãos.

Considere que seja verdade para um certo n (uma certa quantidade de pessoas) (hipótese), teremos:

$$C_{n,2} = \frac{n!}{(n-2)!\,2!}$$

Sabe-se que para cada 1 (uma) pessoa que entra no grupo, soma-se n apertos de mãos, pois essa pessoa irá cumprimentar todas as n que já faziam parte do grupo. Assim, para $n + 1$ pessoas, teremos $C_{n,2} + n$ cumprimentos. Ou seja,

$$C_{n,2} + n = \frac{n!}{(n-2)!\,2!} + n$$

Podemos, ainda, igualar os denominadores:

$$C_{n,2} + n = \frac{n! + n(n-2)!\,2!}{(n-2)!\,2!}$$

Nosso objetivo agora é provar que $C_{n,2} + n = C_{(n+1),2}$, ou seja, que para $n + 1$ pessoas, também teremos $C_{(n+1),2}$ cumprimentos (tese). Uma alternativa interessante é desenvolver $n!$ (n fatorial) de modo a colocar algum fator em evidência. Vejamos:

$$\frac{n(n-1)(n-2)! + n(n-2)!\,2!}{(n-2)!\,2!}$$

Assim, podemos colocar $n(n-2)!$ em evidência:

$$\frac{n(n-2)!\left((n-1) + 2!\right)}{(n-2)!\,2!}$$

Além de tudo, sabe-se que $2! = 2 \cdot 1 = 2$. Substituindo:

$$\frac{n(n-2)!\,(n-1+2)}{(n-2)!\,2!}$$

Simplificando, teremos:

$$\frac{n(n-2)!\,(n+1)}{(n-2)!\,2!}$$

Agora, podemos multiplicar e, ao mesmo tempo, dividir a fração pelo fator $(n-1)$, sem perda de generalidade, já que fazer isso é equivalente a multiplicar a fração por 1, o que não altera o valor da expressão. Sendo assim, teremos:

$$\frac{(n-1)n(n-2)!\,(n+1)}{(n-1)(n-2)!\,2!}$$

Continuando, pela propriedade comutativa da multiplicação, podemos permutar os fatores de modo a obter:

$$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)!}{(n-1)(n-2)!\,2!}$$

O mesmo que:

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!\,2!}$$

Ou ainda,

$$\frac{(n+1)!}{\big((n+1)-2\big)!\,2!}$$

Que é exatamente onde queríamos chegar: $C_{(n+1),2}$. Portanto, provamos que se a conjectura vale para uma certa quantidade n de pessoas, também vale para $n+1$ pessoas. Logo, por indução matemática, a conjectura é verdadeira para todo n natural.

■

Em se tratando de indução matemática é importante saber onde se quer chegar, pois, dessa forma, torna-se mais simples identificar as técnicas que serão empregadas a fim de tornar a demonstração verdadeira. Na situação anterior, utilizamos um recurso algébrico bastante conveniente, com vistas a obter o fatorial desejado, algo intuitivo, mas que poderia se tornar um empecilho caso não soubéssemos o objetivo da demonstração. A nosso ver, todas essas especificidades da demonstração por indução a tornam ainda mais interessante, uma vez que, como dito anteriormente, não existe um algoritmo pronto, mas a necessidade de argumentação sólida e criatividade da parte do aluno/professor.

4. Potências de um Número Inteiro e Divisibilidade

As principais propriedades elementares de potência são bastante conhecidas e explanadas em livros didáticos de matemática do ensino fundamental (Andrini; Vasconcellos, 2015; Giovanni; Castrucci; Giovanni Jr., 1998). Entretanto de acordo com Ball (1960), durante anos o único expoente considerado para potência era o 2, conhecido como "potência original", tendo em vista que os outros expoentes foram estudados posteriormente, o que mostra que o conceito de potenciação embora seja trabalhado nos livros abertamente, teve um processo de desenvolvimento longo, o que corrobora com o estudo de Sierra (2000). O referido estudo relata que é somente nas séries posteriores ao sexto ano que o conceito de potenciação é expandido para um conceito mais algébrico, sendo trabalhado anteriormente de maneira prática e explorado com um rigor algébrico somente na disciplina de "teoria dos números" em cursos de graduação. Diante disso ao debruçar nossos estudos sob a perspectiva da teoria elementar dos números, notou-se a presença de inúmeras proposições envolvendo potências e divisibilidade.

É importante ressaltar que no que tange a divisibilidade concordamos com Martinez *et al.* (2013 p. 15) que retrata o conceito de um número ser divisível por outro da seguinte forma: "Dados dois inteiros *a* e *d*, dizemos que *d* divide *a* ou que *d* é um divisor de *a, ou ainda que a* é um múltiplo de *d* e escrevemos *d*|*a* se existir um *q* ϵ ℤ com *a* = *qd*".

Essas e outras observações nos permitiram constatar a presença de uma propriedade dos números inteiros pouco explorada no âmbito dos cursos de formação de professores de matemática, a saber: dado x e k, inteiros positivos, e n natural, x divide a diferença entre $(x+k)^n$ e k^n. Provaremos por indução.

Com o propósito de tornar as demonstrações mais acessíveis ao leitor, é vantajoso saber os significados dos seguintes símbolos matemáticos: ∈ (pertence), ℕ (conjunto dos números naturais), ℤ (conjunto dos números inteiros), $\mathbb{Z}_+$ (conjunto dos números inteiros não negativos), $\mathbb{Z}_+^*$ (conjunto dos números inteiros positivos), ∀ (para todo), | (divide), > (maior do que), < (menor do que), Σ (somatório), ■ (final da demonstração).

4.1 Mostre que para $x, k \in \mathbb{Z}_+^*$, e $n \in \mathbb{N}$, vale $x|[(x+k)^n - k^n]$

Demonstração:

Queremos provar que $(x+k)^n - k^n = x \cdot q$ tal que $q \in \mathbb{Z}_+$ (tese)

Vejamos para $n = 1$ (base de indução), segue

$$(x+k)^1 - k^1 = x + k - k = x = x \cdot 1$$

A proposição é válida para $n = 1$, pois todo inteiro positivo é múltiplo de si mesmo.

Suponha que seja verdadeiro para um certo n (hipótese), temos

$$(x+k)^n - k^n = x \cdot q$$

Multiplicando por $(x+k)$ ambos os lados da equação, obtemos

$$(x+k)^n \cdot (x+k) - k^n(x+k) = x \cdot q(x+k)$$
$$(x+k)^{n+1} - xk^n - k^{n+1} = x \cdot q(x+k)$$
$$(x+k)^{n+1} - k^{n+1} = x \cdot q(x+k) + xk^n$$

Colocando o fator x em evidência no segundo membro da equação e denominando $q(x+k) + k^n = q'$ temos

$$(x+k)^{n+1} - k^{n+1} = x \cdot [q(x+k) + k^n]$$

$$(x+k)^{n+1} - k^{n+1} = x \cdot q'$$

Sabe-se que o produto e a soma de inteiros sempre resultarão em um número inteiro, assim, a proposição também é válida para $n+1$. Portanto, pela indução matemática, conclui-se que é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Essa propriedade garante várias proposições, a exemplo: $5|(7^n - 2^n)$, $5|(9^n - 4^n)$, $3|(10^n - 7^n)$, $3|(14^n - 11^n)$, $8|(10^n - 2^n)$, $4|(7^n - 3^n)$, entre outras. E, por consequência, se tomarmos $k = 1$, temos $x|[(x+1)^n - 1]$. Ao substituir x pelo seu antecessor em $\mathbb{Z}_+$, desde que x seja maior do que 1 a fim de evitar a divisão por zero, concluímos que $(x-1)|(x^n - 1)$. Em outros termos, ***para todo número inteiro positivo maior do que 1, vale que o seu antecessor divide o antecessor de qualquer uma de suas potências***. Esta é uma propriedade conhecida na teoria dos números, contudo, pretende-se demonstrá-la por meio da indução matemática.

4.2 Mostre que para $x \in \mathbb{Z}_+^*$, tal que $x > 1$, vale $(x-1)|(x^n - 1)$ onde $n \in \mathbb{N}$

Demonstração:

Queremos provar que $x^n - 1$ é múltiplo de $x - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (tese)

Suponha para $n = 1$ (base de indução), temos

$$\frac{x^1 - 1}{x - 1} = \frac{x - 1}{x - 1} = 1 \in \mathbb{Z}_+$$

Suponha que também seja verdadeiro para um certo n (hipótese), segue

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = k \in \mathbb{Z}_+$$

Suponha para $n+1$, obtemos

$$\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \frac{x \cdot x^n - 1}{x - 1}$$

Podemos somar e, ao mesmo tempo, subtrair x no numerador da fração,

$$= \frac{x \cdot x^n - x + x - 1}{x - 1}$$

Colocando x em evidência,

$$= \frac{x(x^n - 1) + (x - 1)}{x - 1} = \frac{x(x^n - 1)}{x - 1} + \frac{x - 1}{x - 1}$$

Pela hipótese, temos que $\frac{x^n-1}{x-1} = k$, e, além disso, $\frac{x-1}{x-1} = 1$, logo

$$\frac{x(x^n - 1)}{x - 1} + \frac{x - 1}{x - 1} = xk + 1$$

Sabe-se que o produto e a soma de inteiros sempre resultarão em um número inteiro, assim,

$$\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \in \mathbb{Z}_+$$

Logo, por indução matemática, a proposição é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

■

Essa propriedade garante proposições do tipo $2|(3^n - 1)$ (lê-se dois divide o antecessor da enésima potência de três), $3|(4^n - 1)$, $4|(5^n - 1)$, e assim sucessivamente. Assim como proposições do tipo $3|(2^{2n} - 1)$, $8|(3^{2n} - 1)$, $15|(4^{2n} - 1)$, $24|(5^{2n} - 1)$, entre outras. Isso acontece porque usando as propriedades elementares de potência, podemos escrever 9^n como sendo 3^{2n}, 16^n como 4^{2n}, 25^n como 5^{2n}, e assim por diante. A mesma propriedade se faz presente na série geométrica do tipo $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, isto é, $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, daí vem que $\sum_{i=0}^{n} x^i < x^{n+1}$. Nela é possível observar a propriedade (4.2) em $\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, pois esta fórmula só é válida porque $(x - 1)$ divide $(x^{n+1} - 1)$. Tais assuntos e suas respectivas demonstrações são frequentemente propostos em livros de teoria dos números, como por exemplo em Filho (1981), Aires (2015) e Bezerra (2018).

Dessa feita, pode-se ainda gerar outras ideias a partir do enunciado anterior, como por exemplo: somando 1 ao quociente $\frac{x^n-1}{x-1}$, assim, obtendo:

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} + 1 = \frac{x^n - 1}{x - 1} + \frac{x - 1}{x - 1} = \frac{x^n - 1 + x - 1}{x - 1} = \frac{x^n + (x - 2)}{x - 1} \in \mathbb{Z}$$

Ou seja, $(x-1)|[x^n+(x-2)]$. Daí, surgem várias outras proposições, tais como: $2|(3^n+1)$; $3|(4^n+2)$; $4|(5^n+3)$; $5|(6^n+4)$; $6|(7^n+5)$; $7|(8^n+6)$; $8|(9^n+7)$; $9|(10^n+8)$; e assim por diante. Escolhendo $x=2a$ para algum $a\in\mathbb{Z}_+^*$ e $k=1$ em (4.1) temos: $2a|[(2a+1)^n-1]$. Por consequência, $a|[(2a+1)^n-1]$. O mesmo acontece tomando $x=3a$, $x=4a$, $x=5a$, e assim sucessivamente. Conjecturando que ***todo inteiro positivo divide o antecessor de qualquer uma das potências do sucessor de qualquer um de seus múltiplos***. Provaremos por indução.

4.3 Mostre que para $x, k \in \mathbb{Z}_+^*$, e $n \in \mathbb{N}$, vale $x|[(xk+1)^n-1]$

Demonstração:

Queremos provar que $(xk+1)^n-1=x\cdot q$ tal que $q\in\mathbb{Z}_+$ (tese)

Vejamos para $n=1$ (base de indução), segue

$$(xk+1)^1-1=xk+1-1=xk$$

A proposição é válida para $n=1$, pois xk é múltiplo de x.

Suponha que seja verdadeiro para um certo n (hipótese), temos

$$(xk+1)^n-1=x\cdot q$$

Multiplicando por $(xk+1)$ ambos os lados da equação, obtemos

$$(xk+1)^n\cdot(xk+1)-1(xk+1)=x\cdot q(xk+1)$$
$$(xk+1)^{n+1}-xk-1=x\cdot q(xk+1)$$
$$(xk+1)^{n+1}-1=x\cdot q(xk+1)+xk$$

Colocando o fator x em evidência no segundo membro da equação e denominando $q(xk+1)+k=q'$ temos

$$(xk+1)^{n+1}-1=x\cdot[q(xk+1)+k]$$
$$(xk+1)^{n+1}-1=x\cdot q'$$

Sabe-se que o produto e a soma de inteiros sempre resultarão em um número inteiro, assim, a proposição também é verdadeira para $n+1$. Portanto, pela indução matemática, conclui-se que é válida para todo $n\in\mathbb{N}$.

São muitas as possibilidades de demonstrações geradas a partir das ideias propostas nesta seção. Acredita-se que com criatividade e bom senso é possível a elaboração de conjecturas bem interessantes. Ainda assim, tendo em vista não esgotar as discussões futuras, decidimos encerrar esta seção com exemplos.

4.4 Mostre que $5|(9^{2n-1}+1)$ para todo n natural

Demonstração:

Queremos provar que $9^{2n-1}+1=5q$ tal que $q\in\mathbb{Z}_+$ (tese)

Vejamos para $n=1$ (base de indução), segue

$$9^{2\cdot 1-1}+1=9^1+1=10$$

A afirmação é verdadeira para $n=1$, pois $10=5\cdot 2$.

Suponha que também seja verdadeiro para um certo n (hipótese), então

$$9^{2n-1}+1=5q$$

Multiplicando por 9^2 ambos os lados da igualdade, temos

$$9^{2n-1+2}+9^2=5\cdot 9^2q$$

$$9^{2n+2-1}+9^2=5\cdot 9^2q$$

$$9^{2(n+1)-1}=5\cdot 9^2q-9^2$$

Somando 1 em ambos os lados da igualdade, vem

$$9^{2(n+1)-1}+1=5\cdot 9^2q-9^2+1$$

$$9^{2(n+1)-1}+1=5\cdot 9^2q-80$$

$$9^{2(n+1)-1}+1=5\cdot(9^2q-16)$$

Denominando $9^2q-16=q'$, obtemos

$$9^{2(n+1)-1}+1=5q'$$

Mostramos que se vale para um certo n natural, também vale para o seu sucessor, logo, por indução matemática, é verdade para todo $n\in\mathbb{N}$.

■

4.5 Mostre que $8|(7^{2n+1}+1)$ para todo n natural

Demonstração:

Queremos provar que $7^{2n+1}+1=8q$ tal que $q\in\mathbb{Z}_+$ (tese)

Quando $n = 1$ (base de indução), segue

$$7^{2\cdot1+1} + 1 = 7^3 + 1 = 343 + 1 = 344$$

A proposição é verdadeira para $n = 1$, pois $344 = 8 \cdot 43$.

Admita que também seja válido para um certo n (hipótese), então temos

$$7^{2n+1} + 1 = 8q$$

Multiplicando por 7^2 ambos os lados da equação, se obtém

$$7^{2n+1+2} + 7^2 = 8 \cdot 7^2 q$$
$$7^{2n+2+1} + 7^2 = 8 \cdot 7^2 q$$
$$7^{2(n+1)+1} = 8 \cdot 7^2 q - 7^2$$

Somando 1 em ambos os lados da igualdade, vem

$$7^{2(n+1)+1} + 1 = 8 \cdot 7^2 q - 7^2 + 1$$
$$7^{2(n+1)+1} + 1 = 8 \cdot 7^2 q - 48$$
$$7^{2(n+1)+1} + 1 = 8(7^2 q - 6)$$

Denominando $7^2 q - 6 = q'$, temos

$$7^{2(n+1)+1} + 1 = 8q'$$

Provamos que se a regra vale para um certo n natural, também vale para o seu sucessor, por indução matemática, conclui-se que é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

■

4.6 Mostre que $4|(3^{2n} + 3)$ para todo n natural

Demonstração:

Queremos provar que $3^{2n} + 3 = 4q$ tal que $q \in \mathbb{Z}_+$ (tese)

Vejamos para $n = 1$ (base de indução), segue

$$3^{2\cdot1} + 3 = 3^2 + 3 = 9 + 3 = 12$$

12 é múltiplo de 4, portanto o caso inicial está verificado.

Suponha que a propriedade seja verdadeira para um certo n natural (hipótese), temos

$$3^{2n} + 3 = 4q$$

Multiplicando ambos os lados por 3^2, obtemos

$$3^{2n+2} + 3^3 = 4 \cdot 3^2 q$$

$$3^{2(n+1)} = 4 \cdot 3^2 q - 3^3$$

Somando 3 em ambos os lados da igualdade, vem

$$3^{2(n+1)} + 3 = 4 \cdot 3^2 q - 3^3 + 3$$

$$3^{2(n+1)} + 3 = 4 \cdot 3^2 q - 24$$

$$3^{2(n+1)} + 3 = 4(3^2 q - 6)$$

Reescrevendo $3^2 q - 6 = q'$, segue

$$3^{2(n+1)} + 3 = 4q'$$

Mostramos que se vale para um certo n, também vale para o seu sucessor, por indução matemática, conclui-se que a proposição é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

■

4.7 Mostre que $3|(20^{2n} - 1)$ para todo n natural

Demonstração:

Queremos provar que $20^{2n} - 1 = 3q$ tal que $q \in \mathbb{Z}_+$ (tese)

Quando $n = 1$ (base de indução), segue

$$20^{2\cdot 1} - 1 = 20^2 - 1 = 400 - 1 = 399$$

Verificamos o caso inicial, pois 399 é múltiplo de 3.

Considere que seja verdadeiro para um certo n natural (hipótese), temos

$$20^{2n} - 1 = 3q$$

Multiplicando ambos os lados por 20^2, obtemos

$$20^{2n+2} - 20^2 = 3 \cdot 20^2 q$$

$$20^{2(n+1)} = 3 \cdot 20^2 q + 20^2$$

Subtraindo 1 em ambos os lados da igualdade, vem

$$20^{2(n+1)} - 1 = 3 \cdot 20^2 q + 20^2 - 1$$
$$20^{2(n+1)} - 1 = 3 \cdot 20^2 q + 399$$
$$20^{2(n+1)} - 1 = 3(20^2 q + 133)$$

Denominando $20^2 q + 133 = q'$, pode-se escrever

$$20^{2(n+1)} - 1 = 3q'$$

Admitindo que a afirmação é verdadeira para um certo n natural, é possível provar que a regra também é verdadeira para o seu sucessor, logo, por indução matemática, a proposição é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

■

4.8 Mostre que $\mathbf{10}|(\mathbf{9}^{\mathbf{2}n} - \mathbf{1})$ para todo n natural

Demonstração:

Queremos provar que $9^{2n} - 1 = 10q$ tal que $q \in \mathbb{Z}_+$ (tese)

Vejamos para $n = 1$ (base de indução), vem

$$9^{2\cdot1} - 1 = 9^2 - 1 = 81 - 1 = 80$$

Percebe-se que a regra funciona, pois 80 é múltiplo de 10.

Suponha que seja verdadeiro para um certo n (hipótese), temos

$$9^{2n} - 1 = 10q$$

Multiplicando os dois lados da equação por 9^2, obtemos

$$9^{2n+2} - 9^2 = 10 \cdot 9^2 q$$
$$9^{2(n+1)} = 10 \cdot 9^2 q + 9^2$$

Subtraindo 1 em ambos os lados da igualdade, vem

$$9^{2(n+1)} - 1 = 10 \cdot 9^2 q + 9^2 - 1$$
$$9^{2(n+1)} - 1 = 10 \cdot 9^2 q + 80$$
$$9^{2(n+1)} - 1 = 10(9^2 q + 8)$$

Admitindo $9^2 q + 8 = q'$, segue

$$9^{2(n+1)} - 1 = 10q'$$

Mostramos que se a proposição é verdadeira para um certo n natural, também é para o seu sucessor, conclui-se que a afirmação é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

5. Considerações Finais

Nesta laboração apresentaram-se demonstrações alternativas para proposições específicas envolvendo números inteiros e propriedades da potenciação, utilizando o método da indução matemática. Dialogamos sobre proposições matemáticas que envolvem divisibilidade em $\mathbb{Z}$, assim como a propriedade supra referida. Com efeito, inferimos que o método da indução matemática é uma ferramenta eficaz na verificação de conjecturas que relacionam os números naturais, ao passo que alcançamos os objetivos deste trabalho.

O educador matemático pode também agregar a indução matemática nas aulas de geometria com uso de tecnologias, por exemplo, utilizar o GeoGebra – um *software* livre de geometria dinâmica – na verificação de fórmulas matemáticas como a soma S dos ângulos internos $(S = (n-2) \cdot 180°)$ e a quantidade D de diagonais de um polígono convexo $\left(D = \frac{n(n-3)}{2}\right)$, e por conseguinte demonstrar ambas as conjecturas por meio da indução matemática. Sempre ajustando o nível de complexidade para o respectivo nível de ensino.

Dessa feita, espera-se que as demonstrações e ideias apresentadas neste estudo auxiliem professores e alunos em sala de aula, sobretudo contribuindo nos processos de ensino e aprendizagem dos que, na seara da teoria dos números, se interessarem pelos assuntos aqui apresentados. Sugere-se a continuação em pesquisas futuras, em tempo algum intentou-se esgotar as discussões sobre o tema.

Referências

AIRES, Francisco César. **Introdução à teoria dos números**. 2. ed. Fortaleza: EdUECE, 2015.

ALMOULOUD, Saddo Ag; FIGUEROA, Teodora Pinheiro; FONSECA, Rubens Vilhena. Análise epistemológica de teoria dos números e criptografia: importância dessas áreas nos currículos de licenciatura em matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, PR, Brasil, v.10, n.21, p.22-43, jan.-abr. 2021. Disponível em:<https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/6284> Acesso em: 22/05/2024.

AMORIM, Flávia Lins de; SANTOS, Júlio César; SANTOS, Nadielza Carvalho. Aplicação do método de indução matemática em progressões aritméticas e geométricas. **Caderno de Graduação - Ciências Exatas e Tecnológicas - UNIT - SERGIPE**, *[S. l.]*, v. 6, n. 1, p. 39, 2020. Disponível em:<https://periodicos.set.edu.br/cadernoexatas/article/view/8415> Acesso em: 22/05/2024.

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando matemática 6**. 4. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2015.

BALACHEFF, Nicolas. **A study of students' proving processes at the junior high school level. Second** UCSMP International Conference on Mathematics Education, Chicago, 1988.

BALL, Rouse. **A Short Account of the History of Mathematics**. 4 ed, MacMillan, London, 1908. Reprint by Dover Publications, New York, 1960.

BATISTA, Jefferson de Melo; SANTIAGO, Raquel Vidigal. A utilização de uma sequência didática para o ensino de Potências e Raízes. **Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 7, n. 1, 2023. Disponível em: https://periodicos.ufjf.br/index.php/ridema/article/view/41012. Acesso em: 7 jun. 2024.

BATISTELA, Rosemeire de Fatima; BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; LAZARI, Henrique. Demonstrações Alternativas e Re-Demonstrações na Produção e no Ensino de Matemática. **Jornal Internacional De Estudos Em Educação Matemática**, 13(2), 203–210, 2020. Disponível em:<https://jieem.pgsskroton.com.br/article/view/8015> Acesso em: 23/05/2024.

BEZERRA, Maria de Nazaré Carvalho. **Teoria dos Números**: um curso introdutório. Belém: AEDI/UFPA, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998. 148 p.

CALDATO, João; UTSUMI, Miriam Cardoso; NASSER, Lilian. Argumentação e demonstração em matemática: a visão de alunos e professores. **Revista Triângulo**, Uberaba - MG, v. 10, n. 2, p. 74–93, 2018. Disponível em:<https://seer.uftm.edu.br/revistaeletronica/index.php/revistatriangulo/article/view/2583> Acesso em: 22/05/2024.

COUTINHO, Lázaro. **Matemática e mistério em Baker Street. 1** ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2003.

FILHO, Edgard de Alencar. **Teoria elementar dos números**. São Paulo: Nobel, 1981.

FOSSA, John A. Maurolico e Pascal: Indução Matemática e Demonstração por Exemplificação. **Revista Brasileira de História da Matemática**, [*s. l.*], v. 21, n. 41, p. 11–24, 2021. Disponível em:<https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/338>. Acesso em: 05/06/2024.

FREITAS, Natanael Charles Brito. **Princípio Da Indução Matemática: Fundamento Teórico E Aplicações Na Educação Básica.** Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional (PROFMAT) do Centro de Ciências e Tecnologia (CCT) da Universidade Estadual do Ceará. Fortaleza. 2013.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4ª ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito; GIOVANI JR., José Ruy. **A conquista da matemática**. São Paulo: FTD, 1998.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de metodologia científica**. 5ª ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MARTINEZ, Fabio; MOREIRA, Carlos; SALDANHA, Nicolau; TENGAN, Eduardo. **Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro.** 3ª Edição. Disponível em:https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4576649/mod_resource/content/1/Um%20passeio%20pelos%20primos%20e%20outros%20n%C3%BAmeros%20familiares..pdf. Acesso em: 10/12/2024.

MOTA, Marcos Coutinho; CARVALHO, Marcos Pavani de. Os diferentes tipos de demonstrações: uma reflexão para os cursos de licenciatura em matemática. **Revista da Educação Matemática da UFOP**, Vol I, 2011 - XI Semana da Matemática e III Semana da Estatística, 2011. Disponível em:<https://periodicos.ufop.br/redumat/article/view/2012> Acesso em: 23/05/2024.

NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa. Demonstrações Matemáticas Dinâmicas. **REVEMAT**, Florianópolis (SC), v.15, n.1, p.1-21, 2019. Disponível em:<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2019.e61725> Acesso em: 23/05/2024.

OLIVEIRA, Gerson Pastre; FONSECA, Rubens Vilhena. A teoria dos números na formação de professores de matemática: (in)compreensões acerca da primalidade e do teorema fundamental da Aritmética. **Ciênc. Educ.**, Bauru, v. 23, n. 4, p. 881-898, 2017. Disponível em:<https://www.scielo.br/j/ciedu/a/fzRbfdqzZPq5cQzKpDHVZtK/> Acesso em: 22/05/2024.

RAMOS, Laine Silva; OLIVEIRA, Renata Gomes de; BARBOSA, Mauro Guterres; GONÇALVES, Tadeu Oliver. Práticas de ensino sobre potenciação e resolução de problemas nos enem. **REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, Cuiabá, Brasil, v. 10, n. 2, p. e22043, 2022. Disponível em:<https://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/reamec/article/view/13848> Acesso em: 23/05/2024.

SHULMAN, Lee. Those who Understand: Knowledge Growth in Teaching. **Educational Researcher:** Washington, v.15, n.2, February, 1986. P.4-14.

SIERRA, Gustavo Martínez. **Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didáticos: el caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales**. 107 f. Dissertacão (Mestrado em Ciências) - Instituto Politécnico Nacional México D. F. 2000.

SILVA, Janiely Lima da; COSTA, Luzia Clênia Campos da; OLIVEIRA, Maria Luana Domingos de; DANTAS, Oscar Bezerra; SANTOS, Josimar José dos. Aplicação do método de indução matemática no Ensino Médio com o estudo das sequências de números poligonais. **Revista Educação Pública**, Rio de Janeiro, v. 22, nº 21, 7 de junho de 2022. Disponível em:<https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/22/21/aplicacao-do-metodo-de-inducao-matematica-no-ensino-medio-com-o-estudo-das-sequencias-de-numeros-poligonais> Acesso em: 22/05/2024.

SILVA, Petrônio Fernandes da; GONÇALVES, Anderson Diego Silva; MEDEIROS, Jânio Elpídio de. **Jogo da velha da potenciação: vivências no laboratório de ensino de matemática**. **Anais IV CONEDU...** Campina Grande: Realize Editora, 2017. Disponível em:<https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/37271> Acesso em: 23/05/2024.

SILVA, Reginaldo Leoncio; ALMEIDA, Roger Luiz da Silva. O poderoso princípio da indução matemática. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 22, n. 1, 2022. Disponível em:<https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/274> Acesso em: 23/05/2024.

SOUSA, Dárli Almeida de; BRITO, José Augusto Costa; SCHEIDEGGER, Jéssica; ALVES, Alex Andrade. Análise de erros em questões de potenciação: uma experiência de estágio supervisionado em matemática. **XII Encontro Nacional de Educação Matemática ANAIS...** São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016. Disponível em:<http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6800_4017_ID.pdf> Acesso em: 22/05/2024.

Sobre os autores

Gilberto Gonçalves de Sousa
Licenciado em Matemática pela Universidade do Estado do Pará (UEPA). Pós-graduado em Matemática e Física (FAVENI). Especialista em Matemática, suas Tecnologias e o Mundo do Trabalho (UFPI/MEC). Desenvolve seus estudos em questões referentes ao ensino e aprendizagem de matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. E-mail: contatogilbertosousa@gmail.com. Orcid: https://orcid.org/0009-0006-3256-6596.

Lucas Morais do Nascimento
Mestre em Ciências da Educação pela Universidade do Minho. Especialista em Educação Especial com Ênfase na Inclusão pela Faculdade Integrada Brasil Amazônia. Especialista em Ensino de Matemática e Física pela Faculdade UNIBF. Professor da Universidade do Estado do Pará. Professor de matemática e física na Secretaria de Educação do Pará (SEDUC-PA). E-mail: lucas.nascimento@escola.seduc.pa.gov.br. Orcid: https://orcid.org/0009-0005-7478-1086.

Recebido em: 10/10/2024
Aceito para publicação em: 29/10/2024