Programa de Pós-Graduação em Educação
Universidade do Estado do Pará
Belém-Pará- Brasil

Revista Cocar

Revista Cocar. V.21 N.39/ 2024 p. 1-19 ISSN: 2237-0315

Quaternions de Leonardo: uma abordagem para o ensino via Engenharia Didática e Teoria das Situações Didáticas

Leonardo's quaternions: an approach to teaching via didactic engineering and theory of didactic situations

Milena Carolina dos Santos Mangueira
Francisco Regis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)
Fortaleza - Brasil
Paula Maria Machado Cruz Catarino
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD)
Vila Real - Portugal

Resumo
Este trabalho objetiva estudar os quaternions de Leonardo, explorando seus teoremas, propriedades e identidades relacionadas. A metodologia adotada foi a Engenharia Didática, articulada à Teoria das Situações Didáticas, para organizar uma proposta de ensino sobre o tema. Por se tratar de uma pesquisa de tese em andamento, utilizamos apenas as duas primeiras fases da Engenharia. Na análise preliminar foi feito um levantamento teórico sobre a sequência de Leonardo, os quaternions e seu ensino na licenciatura. A partir disso, na análise *a priori* construímos duas situações didáticas, sendo a primeira referente à relação entre estes números e os quaternions de Fibonacci e a segunda acerca da fórmula de Binet para estes números. Mais adiante, pretende-se continuar as fases da Engenharia implementando as situações com o referido público-alvo, para coleta e análise *a posteriori* dos dados.
Palavras-chave: Quaternions de Leonardo; Engenharia Didática; Teoria das Situações Didáticas.

Abstract
This work aims to study Leonardo's quaternions, exploring their theorems, properties, and related identities. The methodology adopted was Didactic Engineering, articulated with the Theory of Didactic Situations, to organize a teaching proposal on the subject. Since this is an ongoing thesis research, we used only the first two phases of the Engineering. In the preliminary analysis, a theoretical survey was conducted on Leonardo's sequence, quaternions, and their teaching in the undergraduate program. Based on this, in the a priori analysis, we constructed two didactic situations, the first one concerning the relationship between these numbers and Fibonacci's quaternions, and the second one about the Binet formula for these numbers. Furthermore, it is intended to continue the phases of Engineering by implementing the situations with the aforementioned target audience, for data collection and posterior analysis.
Keywords: Leonardo's Quaternions. Didactic Engineering. Theory of Didactic Situations.

1- Introdução

Nos livros de História da Matemática (HM), as sequências lineares recursivas, como a sequência de Fibonacci, criada por Leonardo Pisano (1180-1250), são frequentemente tratadas de forma superficial. Geralmente, a abordagem limita-se a aspectos básicos, sem explorar a complexidade e as possíveis generalizações dessas sequências (Alves; Vieira; Catarino, 2020). Em contrapartida, na literatura de Matemática Pura, observa-se uma análise mais profunda das propriedades da sequência de Fibonacci e a exploração de sequências relacionadas, como a sequência de Leonardo.

A sequência de Leonardo, uma sequência linear, passou a ser explorada de forma mais aprofundada a partir dos estudos de Catarino e Borges (2019), que investigaram sua generalização e complexificação. Entretanto, essa sequência ainda é pouco abordada nos livros de História da Matemática (HM), aparecendo principalmente em artigos científicos voltados à Matemática Pura. Para ampliar a compreensão dessa sequência, propomos a introdução dos quaternions de Leonardo, resultantes da associação entre essa sequência e os números quaternions.

Neste contexto, a presente pesquisa justifica-se pela importância teórica dos quaternions de Leonardo, bem como o potencial educacional que sua introdução pode trazer ao ensino de matemática, proporcionando uma abordagem relevante e que pode ser replicada em diferentes contextos educacionais. Para isso partimos da seguinte pergunta de pesquisa: *Como os quaternions de Leonardo contribuem para o entendimento e avanço no cenário matemático contemporâneo, considerando a exploração de teoremas, propriedades e identidades relevantes a esses números?*

Os quaternions de Leonardo representam uma extensão dos números complexos, introduzindo uma nova dimensão na compreensão matemática. Ao explorar os teoremas, propriedades e identidades associadas a esses números, abre-se uma janela para um campo vasto e rico em possibilidades de pesquisa e aplicação.

Neste contexto, o objetivo deste estudo é aprofundar o entendimento dos quaternions de Leonardo, destacando sua importância no cenário matemático contemporâneo ao explorar seus teoremas, propriedades e identidades, considerando o âmbito do ensino de matemática.

Para isso, utilizamos a como metodologia de pesquisa a Engenharia Didática (ED) (Artigue, 2014), ao organizar e sistematizar o conteúdo matemático. De modo complementar, adotamos a Teoria das Situações Didáticas (TSD) (Brousseau, 2002) para estruturar as situações didáticas que compõem a proposta de ensino deste trabalho. A ED, em conjunto com a TSD, oferece uma estrutura metodológica para o desenvolvimento de propostas de ensino que visam tornar o estudante ativo em seu processo de aquisição do conhecimento.

A introdução dessas sequências, especialmente os quaternions de Leonardo, tem potencial para enriquecer o ensino de conceitos matemáticos avançados, conforme defendido por Artigue (2014), que ressalta a importância de metodologias como a ED na estruturação eficaz do conhecimento. Assim, ao aplicar essa abordagem à pesquisa sobre os quaternions de Leonardo, busca-se expandir o conhecimento teórico sobre esses números e investigar seu potencial no contexto do ensino de matemática.

Este estudo se concentra nas duas fases iniciais da ED, que são as análises preliminares e concepção e análise *a priori*, visando elaborar uma proposta de ensino sobre o tema. Nas análises preliminares realizou-se um levantamento teórico sobre os tópicos matemáticos envolvidos, bem como o panorama de ensino e discussão destes na licenciatura. Esta primeira fase forneceu suporte à concepção e análise *a priori*, com a criação de um modelo didático (Brousseau, 2002) estruturado a partir de duas situações didáticas específicas. Neste modelo, oferecemos a possibilidade de uma abordagem prática e contextualizada para o ensino desses números, suas propriedades e teoremas.

Considerando a relevância da formação docente e a integração dos quaternions de Leonardo ao currículo de matemática da licenciatura, este estudo visa contribuir para a formação inicial do professor, propiciando uma discussão sobre como abordar o tema de maneira eficaz em sala de aula.

Foram utilizadas apenas as duas primeiras fases da Engenharia Didática (ED) devido ao caráter de pesquisa de doutorado em andamento. A continuidade da pesquisa prevê a aplicação das situações didáticas em sala de aula, seguindo as fases subsequentes da ED para validar e aprimorar a proposta apresentada.

2- Metodologia: Engenharia Didática

A Engenharia Didática (ED) é uma metodologia de pesquisa de origem francesa, concebida a partir dos estudos em Didática da Matemática e teve sua difusão a partir da década de 80. Artigue (1988) faz uma analogia, em que compara o trabalho do professor ao de um engenheiro na ED, destacando a importância do planejamento cuidadoso e da adaptação das estratégias de ensino às necessidades dos alunos, de maneira semelhante ao que um engenheiro faz ao projetar e construir uma estrutura física.

Assim, enquanto metodologia de pesquisa, a ED se concentra em projetar, desenvolver e avaliar situações de ensino que favoreçam a aprendizagem dos alunos. Trata-se de uma abordagem que visa criar ambientes de ensino que promovam a construção ativa do conhecimento, levando em consideração as características dos alunos, os objetivos educacionais e os conteúdos a serem ensinados (Almouloud, 2007; Artigue, 2014).

Esta metodologia é dividida em quatro fases, que são (i) análises preliminares; (ii) concepção e análise *a priori*; (iii) experimentação, e; (iv) *análise a posteriori* e validação. Estas fases são interativas e podem ser retomadas a qualquer tempo. Ou seja, os professores têm a flexibilidade de revisitar etapas anteriores conforme avançam no processo de ED, adaptando suas práticas de ensino às necessidades identificadas no contexto específico de seu desenvolvimento (Almouloud, 2007). Sucintamente, estas fases podem ser definidas de acordo com Almouloud (2007), Artigue (1988; 2014), conforme apresentado no Quadro 1:

Quadro 1: Quadro-síntese sobre as fases da ED.

FASE	DESCRIÇÃO PROCEDIMENTAL
Análises preliminares	Nesta fase, o pesquisador identifica e analisa os objetivos educacionais, os conhecimentos prévios dos alunos, as dificuldades potenciais e os recursos disponíveis, bem como busca compreender o panorama de ensino de um determinado objeto do conhecimento. Essa análise preliminar é essencial para orientar o desenvolvimento das situações de ensino.
Concepção e análise a priori	Com base na análise preliminar, o pesquisador projeta as situações de ensino, definindo os objetivos específicos, os conteúdos a serem abordados, as atividades dos alunos e os recursos necessários, considerando todas as variáveis didáticas atinentes a este processo. Durante essa fase, são elaborados os materiais didáticos e as estratégias de ensino.
Experimentação	Nesta fase, as situações de ensino são experimentadas em sala de aula com os alunos. O pesquisador observa e registram as reações/dados dos alunos, avalia a eficácia das estratégias de ensino e faz ajustes conforme necessário.
Análise a posteriori e validação	Nesta etapa, os resultados da experimentação são analisados para avaliar o impacto das situações de ensino na aprendizagem dos alunos. São considerados aspectos como o alcance dos objetivos educacionais, o engajamento dos alunos e as dificuldades encontradas. Com base na análise, são elaboradas reflexões teóricas que fundamentam as práticas de ensino, contribuindo para a construção de conhecimento no campo da Didática da Matemática e para o desenvolvimento de novas abordagens pedagógicas.

Fonte: Elaborado pelos autores (2024).

Este trabalho, por se tratar de uma pesquisa de doutorado em andamento, versa sobre as duas primeiras fases da ED, estruturando-as da seguinte forma:

(i) *análise preliminar*: realizamos um estudo sobre os quaternions de Leonardo, a partir de uma revisão bibliográfica, buscando compreender tanto a natureza de seus quaternions quanto os métodos de ensino propostos. Inicialmente, exploramos a história e a teoria dos quaternions a partir de livros e artigos científicos. Essa revisão nos permitiu contextualizar os quaternions de Leonardo no campo dos números quaternions, entender sua importância na matemática e seu panorama de ensino. Almouloud (2007) enfatiza a importância de uma análise inicial robusta para orientar a concepção de atividades didáticas eficazes. Dessa forma, a análise preliminar delineou o público-alvo e orientou as decisões metodológicas subsequentes, organizando situações didáticas adequadas ao nível de compreensão desse público.

(ii) *concepção e análise a priori*: a partir da etapa anterior, foram delineadas duas situações didáticas a priori. Nesta etapa, detalhamos as atividades, os objetivos de aprendizagem, os recursos necessários e as estratégias de ensino. As situações didáticas planejadas são: (a) a compreensão dos quaternions de Leonardo em comparação com os quaternions de Fibonacci, e (ii) a aplicação da fórmula de Binet para os quaternions de Leonardo. Definimos os objetivos de aprendizagem para cada situação, especificando o que se espera que os alunos alcancem. Essa abordagem fundamenta-se em estudos como o de Artigue (2014), que defende a adaptação das atividades às necessidades dos alunos para promover uma aprendizagem mais eficaz. Consideramos também as limitações metodológicas, como as possíveis variações na aplicação prática das atividades, dependendo do contexto de ensino e das características dos alunos. Para mitigar essas limitações, foram planejadas situações didáticas flexíveis, que podem ser ajustadas conforme necessário.

Nas seções seguintes desenvolvemos estas duas etapas, com base no aporte teórico encontrado na literatura matemática.

2.1- Análises preliminares: construção de um quadro teórico e constatações iniciais

Nesta etapa da ED, realizamos o levantamento bibliográfico conforme descrito na metodologia. Dividimos a discussão em duas partes: (i) a sequência de Leonardo, suas particularidades e o panorama de pesquisas; e (ii) conceitos relacionados aos quaternions e teoremas envolvendo os quaternions de Leonardo, como preparação para a situação didática a ser desenvolvida *a priori*.

3- A sequência de Leonardo e seu panorama de pesquisas

As sequências lineares e recursivas são amplamente exploradas na Matemática Pura, devido à sua aplicabilidade em diversas áreas, como Biologia, Química e Engenharia. A sequência mais famosa é a de Fibonacci, criada pelo matemático italiano Leonardo Pisano (1180-1250), a partir da problemática dos coelhos imortais. No entanto, segundo Alves *et al.* (2020), Pisano também pode ter criado a sequência de Leonardo, dada a similaridade entre suas relações de recorrência, e o fato de carregar o nome "Leonardo". Contudo, essa informação não é confirmada na literatura.

Catarino e Borges (2019) apresentam matematicamente a sequência de Leonardo, definindo-a como uma sequência de segunda ordem não homogênea, a partir da relação de recorrência:

$$Le_n = Le_{n-1} + Le_{n-2} + 1, n \geq 2$$

sendo $Le_0 = Le_1 = 1$ os seus termos iniciais. Dessa forma, os dez primeiros termos da sequência de Leonardo são dados por 1, 1, 3, 5, 9, 15, 25, 41, 67, 109. Catarino e Borges (2019) também apresentam outra relação de recorrência, definida por:

$$Le_n = 2Le_{n-1} - Le_{n-3}, n \geq 3$$

que toma por base os mesmos valores iniciais $Le_0 = Le_1 = 1$. Porém, nesta recorrência a sequência passa a ser de terceira ordem homogênea. A partir disso, é possível estabelecer uma relação matemática entre os números de Leonardo e os números de Fibonacci, dada por:

$$Le_n = 2F_{n+1} - 1.$$

A equação característica desta sequência é uma cúbica, representada algebricamente por $x^3 - 2x + 1 = 0$ e possui três raízes reais iguais a: $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{5}$, $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{5}$ e $x_3 = 1$. Uma de suas raízes possui o valor aproximado de 1,61, mais conhecido como o número de ouro (Alves; Vieira, 2020).

Nos últimos anos, a sequência de Leonardo tem sido amplamente explorada, com diversos estudos focados em suas generalizações, complexificações e hipercomplexificações. Um exemplo é Shannon (2019), que generalizou os números de Horadam, aplicando essa abordagem aos números de Leonardo. Vieira *et al.* (2019; 2021a; 2021b) apresentaram relações bidimensionais, tridimensionais e *n*-dimensionais de Leonardo, incluindo a inserção da unidade imaginária e o desenvolvimento de identidades relacionadas.

Além disso, os números de Leonardo foram analisados em contextos matriciais e algébricos. Vieira *et al*. (2020) discutiram sua representação matricial, enquanto Mangueira *et al.* (2021a; 2022b; 2021c) avançaram na generalização dos coeficientes da fórmula de recorrência e na introdução de duais e sedênios. Mangueira *et al*. (2021b) também exploraram os biquaternions elípticos de Leonardo, e Mangueira *et al*. (2022a) associaram quaternions híbridos aos números de Leonardo.

Contribuições recentes incluem a criação de novas sequências numéricas baseadas nos números de Leonardo, como os números Pauli-Leonardo (İşbilir *et al.*, 2023), os números de Leonardo-Alwyn (Gökbaş, 2023), e o *k*-Leonardo generalizado (Prasad *et al*., 2023). Esses estudos expandiram o escopo dos números de Leonardo, mostrando sua interconexão com outros tópicos matemáticos, como os números de Fibonacci e de Lucas, abrindo novas possibilidades de pesquisa.

Apesar desse desenvolvimento, poucos estudos se dedicam ao ensino dos números de Leonardo e de seus quaternions, especialmente na formação de licenciatura. Devido à sua complexidade e caráter não tradicional, os quaternions de Leonardo são raramente abordados em sala de aula, o que limita sua presença nos currículos de matemática (Mangueira, 2022). O foco predominante em conceitos mais fundamentais e amplamente aplicáveis no ensino de matemática acaba deixando pouco espaço para temas avançados e específicos como este.

Assim, entendemos que a falta de recursos educacionais e materiais didáticos disponíveis sobre o tema também pode contribuir para sua ausência nas salas de aula da licenciatura. No tocante aos trabalhos voltados para situações de ensino, alguns autores brasileiros têm sido pioneiros, associando os números e a sequência de Leonardo a teorias de ensino (Alves *et al.*, 2021; Mangueira *et al.*, 2021d; Mangueira, 2022) em Didática da Matemática, como a Teoria das Situações Didáticas (TSD) (Brousseau, 2002) e a Engenharia Didática (ED) (Artigue, 2014). Os autores buscam com esta abordagem envolver o estudante, o professor e o conhecimento matemático, valorizando os saberes mobilizados pelos estudantes e seu envolvimento na construção do conhecimento.

Deste modo, este trabalho, enquanto investigação de doutorado, busca também contribuir e desenvolver uma proposta de ensino e recursos didáticos centrados nos quaternions de Leonardo, visando preencher essa lacuna e integrar esse conteúdo de forma mais significativa no ensino de matemática.

Antes de adentrarmos nas situações didáticas, faz-se necessário compreender epistemologicamente os números quaternions e a construção matemática dos quaternions de Leonardo, o que é discutido na subseção seguinte.

4- Quaternions e quaternions de Leonardo

Willian Rowan Hamilton (1805-1865) criou os números quaternions, sendo esses números desenvolvidos a partir de uma tentativa de generalização dos números complexos na forma $z = a + bi$ em três dimensões (Menon, 2009). Segundo Oliveira (2018), os quaternions são considerados *números hipercomplexos*[i], geralmente estudados em Álgebra Abstrata, e podem ser divididos em duas estruturas quaterniônicas, que são: os *quaternions*, que possuem os componentes reais sobre o conjunto $\mathbb{R}$; e os *biquaternions*, que possuem componentes complexas sobre o conjunto $\mathbb{C}$.

Os quaternions têm desempenhado um papel significativo na Matemática e na Física, especialmente no contexto de rotações e representações espaciais em três e quatro dimensões. Sua relevância histórica é inegável, uma vez que eles marcaram uma expansão fundamental ao entendimento dos números complexos, introduzindo uma nova dimensão ao pensamento matemático. No entanto, sua aplicação ao ensino ainda é limitada, sendo uma oportunidade de diversificar o currículo de matemática, principalmente em níveis mais avançados.

Mangueira *et al.* (2022a) relatam que os quaternions são apresentados como somas formais de escalares com vetores usuais do espaço tridimensional, existindo quatro dimensões. Além disso, satisfazem certas relações de multiplicação, como a não comutatividade. A definição de um quaternion é dada por:

$$q = a + bi + cj + dk,$$

onde a, b, c e d são números reais e i, j e k são unidades imaginárias e base ortogonal em $\mathbb{R}^3$. Não obstante, Horadam (1993) apresenta o produto quaterniônico descrito por:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k = -ji, jk = i = -kj, ki = j = -ik.$$

A partir da definição de um quarternion, é possível associar esses números a sequências lineares recorrentes e apresentar os quaternions da sequência escolhida. Mangueira, Alves e Catarino (2021; 2022) exploraram essa ideia ao apresentar os biquaternions e quaternions híbridos de Leonardo. Em outro estudo, Mangueira *et al.* (2023) definiram os quaternions hiperbólicos de *k*-Leonardo e *k*-Perrin. A literatura da Matemática Pura também inclui outros autores que produzem quaternions de diversas sequências.

Com base nas seções anteriores sobre a sequência de Leonardo e os quaternions, é possível definir os quaternions de Leonardo, como feito por Mangueira, Alves e Catarino (2022). Esse trabalho explora matematicamente algumas propriedades e teoremas desses números, sendo recomendada a sua leitura para um maior aprofundamento no tema.

Discorremos sobre algumas definições importantes para esta análise *a priori*:

Definição 1. O número quaternion de Leonardo, denominado por QLe_n, é definido como:

$$QLe_n = Le_n + Le_{n+1}i + Le_{n+2}j + Le_{n+3}k$$

Definição 2. A relação de recorrência dos quaternions de Leonardo é dada por:

$$QLe_n = QLe_{n-1} + QLe_{n-2} + (1+i+j+k), n \geq 2$$

ou ainda,

$$QLe_{n+1} = 2QLe_n - QLe_{n-2}, n \geq 2$$

sendo, $QLe_0 = 1+i+3j+5k$ e $QLe_1 = 1+3i+5j+9k$ seus termos iniciais.

Para $n \geq 0$, é possível apresentar uma relação entre os quaternions de Fibonacci e os quaternions de Leonardo, dada por:

$$QLe_n = 2QF_{n+1} - (1+i+j+k)$$

A equação característica dos quaternions de Leonardo é apresentada por $x^3 - 2x + 1 = 0$ e possui as mesmas raízes da equação característica da sequência de Leonardo.

Apresentamos também a função geradora dos quaternions de Leonardo, sendo esta função que facilita a resolução de recorrências. Esta função é dada por uma série de potências, cujos coeficientes apresentam informações sobre uma sucessão de termos, como mostra o Teorema 1:

Teorema 1. A função geradora dos quaternions de Leonardo é dada por:

$$G_{QLe_n}(x) = \frac{(QLe_0 + QLe_1x)(1-2x) + QLe_2x^2}{1-2x+x^3}$$

De modo complementar, no Teorema 2 trazemos a fórmula que encontra o *n*-ésimo termo de uma sequência, sem depender da relação de recorrência, conhecida como *Fórmula de Binet*:

Teorema 2. Para $n \geq 0$, temos que a fórmula de Binet para os quaternions de Leonardo é dada por:

$$QLe_n = \frac{x_1[2Ax_1^n - (1+i+j+k)] + x_2[(1+i+j+k) - 2Bx_2^n]}{x_1 - x_2},$$

onde $A = QF_1 - QF_0 x_2$, $B = QF_1 - QF_0 x_1$ e x_1 e x_2 são as raízes da equação característica.

Os quaternions de Leonardo, enquanto extensão dos quaternions tradicionais, são propostos como sequência numérica e definidos de forma análoga aos quaternions convencionais. A partir das definições, temos que os quaternions de Leonardo herdam diversas propriedades e características interessantes dos quaternions, ampliando o escopo de aplicação desses objetos matemáticos de forma relacionada. Sua investigação pode levar a percepções sobre a natureza destes números e suas inter-relações, abrindo novas perspectivas para pesquisas em Álgebra e Teoria dos Números.

Na seção seguinte, utilizamos os quaternions de Leonardo para desenvolver duas situações didáticas em torno destes números.

5- Concepção e análise *a priori*

Para planejar e conceber uma estratégia de ensino sobre os quaternions de Leonardo, utilizamos a Teoria das Situações Didáticas (TSD), que se alinha à metodologia de Engenharia Didática adotada neste estudo.

A Teoria das Situações Didáticas (TSD), segundo Brousseau (1986; 2002), é uma teoria de ensino que enfatiza a criação de situações reprodutíveis, chamadas de *situações didáticas*, que facilitam interações entre professor, aluno e conhecimento dentro de um ambiente organizado pelo professor (*milieu*). Esse ambiente tem como objetivo permitir que o aluno construa o conhecimento de forma autônoma.

Conforme Almouloud (2007), o foco da TSD não reside no sujeito cognitivo, mas na própria situação didática, onde as interações entre professor, aluno e conhecimento são essenciais. A TSD é amplamente reconhecida como uma referência no processo de aprendizagem matemática, sendo dividida em quatro etapas: (i) ação; (ii) formulação; (iii) validação, e; (iv) institucionalização (Brousseau, 2002).

Com base nesses princípios, elaboramos duas situações didáticas sobre os quaternions de Leonardo, visando aplicar os fundamentos da TSD para promover a construção ativa do conhecimento pelos alunos. Nessas situações, os alunos são desafiados a interagir com os conceitos dos quaternions de Leonardo, explorando suas propriedades e estabelecendo conexões com outros temas matemáticos. O papel do professor é criar um ambiente propício à aprendizagem, onde os alunos possam se engajar ativamente na construção do conhecimento matemático.

Seguindo as etapas da TSD, desde a introdução dos conceitos até a institucionalização do conhecimento, espera-se que as situações didáticas propostas proporcionem uma compreensão sobre o tema e ampliem as discussões sobre os quaternions de Leonardo, especialmente na formação inicial de professores de matemática.

Dito isto, propomos inicialmente a situação didática 1 (Quadro 2):

Quadro 2: Situação Didática 1.

Ao analisar a similaridade entre os números de Fibonacci e Leonardo, é possível encontrar uma relação entre estes números. Com isso, após o estudo dos quaternions e sua associação aos números de Fibonacci e de Leonardo, é possível encontrar a família dos quaternions de cada sequência, em que ambas as famílias também possuem uma relação entre seus números. Partindo disso, apresente a relação entre os quaternions de Fibonacci e os quaternions de Leonardo.

Fonte: Elaboração dos autores (2024).

A princípio, é necessário que o professor revise com os alunos os conceitos básicos dos números de Fibonacci, bem como apresente a sequência de Leonardo e uma introdução aos quaternions. Assim, os alunos ativam seus conhecimentos prévios e são incentivados a explorar esses conceitos por meio da situação didática proposta. Um exemplo de provocação inicial é propor questões que levem os alunos a identificar padrões nas sequências de Fibonacci e Leonardo e a entender como os quaternions podem ser associados a essas sequências.

Assim, na *fase de ação*, com base na relação entre os números de Fibonacci e Leonardo, dada por $Le_n = 2F_{n+1} - 1,$ espera-se que os alunos percebam que para transformar essa relação para a família dos quaternions, é necessário utilizar a definição dos números quaternions de Fibonacci QF_n e de Leonado QLe_n .

Na *fase da formulação*, os alunos seriam desafiados a formular hipóteses sobre a relação entre os quaternions de Fibonacci e os quaternions de Leonardo. Espera-se que eles descrevam os quaternions de ambas as sequências para encontrar essa relação, percebendo que ela se assemelha à relação dos números das sequências originais, por meio da troca de ideias e conhecimentos prévios (Brousseau, 2002; Almouloud, 2007).

Também se espera que eles percebam que, diferentemente da relação inicial, em que há o valor 1, faz-se necessário encontrar $(1+i+j+k)$, pois refere-se a um número quaternion. Além disso, é importante que os estudantes justifiquem suas ideias com base nos conceitos matemáticos aprendidos. Assim, ao realizar esta mudança, almeja-se que seja encontrada a relação: $QLe_n = 2QF_{n+1} - (1+i+j+k).$

Na *fase de validação*, os alunos têm a oportunidade de testar suas hipóteses por meio de experimentação e resolução da situação didática específica, sendo encorajados a apresentar suas soluções e discutir suas descobertas em grupo, conforme proposto na TSD (Brousseau, 2002). Nessa etapa, é possível que utilizem o princípio da indução matemática para demonstrar e validar os resultados obtidos nas fases anteriores. Com efeito, espera-se que eles apresentem a relação $QLe_n = 2QF_{n+1} - (1+i+j+k)$, ao verificar que esta continua sendo válida para o próximo valor, o $n+1$.

Durante a *fase da institucionalização*, o professor retoma a situação proposta, formaliza o resultado encontrado (Almouloud, 2007) e valida a relação entre os quaternions de Fibonacci e de Leonardo. Neste momento, é recomendável que o professor conduza uma discussão em sala de aula para revisar os principais conceitos aprendidos durante a situação didática e destacar a importância da relação entre os quaternions de Fibonacci e de Leonardo. Essa relação é fundamental para a extensão dos resultados, como demonstrado na situação didática 2 (Quadro 3):

Quadro 3: Situação Didática 2.

A partir da relação entre os números de Fibonacci e de Leonardo, estabelecida por $QLe_n = 2QF_{n+1} - (1+i+j+k)$ e a Fórmula de Binet dos quaternions de Fibonacci, $QF_n = \frac{(QF_1 - QF_0x_2)x_1^n - (QF_1 - QF_0x_1)x_2^n}{x_1 - x_2}$, defina a fórmula de Binet para os quaternions de Leonardo.

Fonte: Elaboração dos autores (2024).

Seguindo o percurso da TSD, na *fase da ação* é almejado que os alunos tomem por base a relação entre os números de Fibonacci e os de Leonardo, $QLe_n = 2QF_{n+1} - (1+i+j+k)$, . Assim, espera-se que eles percebam que QF_{n+1} apresentada nesta relação pode ser substituída pela Fórmula de Binet para os quaternions de Fibonacci.

Dito isto, na *fase da formulação* é possível que os estudantes reescrevam a Fórmula de Binet acrescentando (+1) nos índices, resultando em:

$$QF_{n+1} = \frac{(QF_1 - QF_0x_2)x_1^{n+1} - (QF_1 - QF_0x_1)x_2^{n+1}}{x_1 - x_2}$$

e, partindo disto, substituam aa Fórmula de Binet na relação, obtendo:

$$QLe_n = 2\left[\frac{(QF_1 - QF_0x_2)x_1^{n+1} - (QF_1 - QF_0x_1)x_2^{n+1}}{x_1 - x_2}\right] - (1+i+j+k)$$

As discussões devem ser promovidas em pequenos grupos para estimular a troca de conhecimentos entre os participantes, como proposto na TSD, além de permitir que o grupo verifique a exatidão dos cálculos realizados. Após algumas manipulações algébricas, o resultado obtido pode ser expresso por:

$$QLe_n = \frac{x_1[2(QF_1 - QF_0x_2)x_1^n - (1+i+j+k)] + x_2[(1+i+j+k) - 2(QF_1 - QF_0x_1)x_2^n]}{x_1 - x_2},$$

Desta forma, ao assumir que $A = QF_1 - QF_0x_2$, $B = QF_1 - QF_0x_1$ e tendo x_1 e x_2 como raízes da equação característica, é possível que encontrar a expressão:

$$QLe_n = \frac{x_1[2Ax_1^n - (1+i+j+k)] + x_2[(1+i+j+k) - 2Bx_2^n]}{x_1 - x_2}.$$

Na *fase da validação*, os alunos, de forma autônoma, podem partir do resultado conjecturado anteriormente. Espera-se que demonstrem a Fórmula de Binet, definida por:

$$QLe_n = \frac{x_1[2Ax_1^n - (1+i+j+k)] + x_2[(1+i+j+k) - 2Bx_2^n]}{x_1 - x_2}, n \geq 0$$

para o índice $n+1$, utilizando o método de indução matemática, validando o teorema.

Na *fase de institucionalização* recomenda-se que o docente discuta o conhecimento consolidado pelos alunos, organizando suas descobertas e conclusões de forma coerente. O professor deve verificar os resultados apresentados, confirmando ou refutando o desenvolvimento da Fórmula de Binet para os quaternions de Leonardo. Além disso, é importante que o docente destaque relevância dessa situação para o processo evolutivo-matemático do tema, ampliando sua discussão.

Estas situações didáticas têm como objetivo facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos relacionados aos quaternions de Fibonacci e de Leonardo, além de fomentar a discussão em sala de aula. A partir da exploração da relação entre esses quaternions, com base no modelo didático proposto, os alunos podem desenvolver habilidades em análise, resolução de problemas e trabalho em equipe. Na licenciatura, espera-se que essa proposta enriqueça o ensino da matemática e possa ser adaptada e integrada a outras disciplinas, como Estruturas Algébricas e História da Matemática.

Os resultados obtidos neste estudo fornecem uma base para a introdução dos quaternions de Leonardo ao ensino de matemática na licenciatura, onde há necessidade de explorar conceitos avançados de maneira acessível e didaticamente estruturada. Assim, a ED e a TSD podem ser combinadas de forma eficaz na construção do conhecimento, promovendo uma compreensão contextualizada do tema.

Uma das principais implicações práticas deste estudo é a potencial aplicação dos quaternions de Leonardo em outras áreas do currículo de matemática, como Álgebra, Geometria, e até mesmo em Física, onde a compreensão de quaternions pode ser essencial para o estudo de rotações e transformações espaciais. A abordagem didática desenvolvida pode ser adaptada para ensinar conceitos relacionados, como os quaternions de Fibonacci, e pode ser estendida para explorar outros números hipercomplexos.

Com relação ao campo do ensino e da Educação Matemática, considera-se, ainda, que os resultados deste estudo contribuem para o avanço do conhecimento em Didática da Matemática, ao demonstrar que a ED pode ser uma alternatiza metodológica eficaz no planejamento da introdução de conceitos matemáticos complexos. Espera-se que, a partir das situações didáticas desenvolvidas, seja possível adaptar o ensino às necessidades dos alunos, alcançando um nível mais elevado de compreensão e retenção de conceitos.

6- Considerações finais

Este trabalho apresentou uma abordagem para o ensino dos quaternions de Leonardo, por meio de duas situações didáticas desenvolvidas para facilitar a compreensão do tema e promover sua discussão em sala de aula. Enquanto a maioria das pesquisas sobre quaternions se concentra na matemática pura, sem foco no ensino, acreditamos que o estudo do tema na licenciatura tem um forte potencial para contribuir tanto para o avanço do conhecimento quanto para suas possíveis aplicações.

As situações foram estruturadas a partir da Engenharia Didática, associada à Teoria das Situações Didáticas, sendo utilizadas apenas as duas primeiras fases da Engenharia, dado o caráter de pesquisa de doutorado em andamento deste trabalho. A abordagem desenvolvida neste estudo mostra potencial para a construção do conhecimento matemático em torno dos quaternions de Leonardo. No entanto, é pertinente considerar como essa metodologia pode ser adaptada e aplicada a outros conceitos matemáticos igualmente complexos. Ao fazê-lo, surge a oportunidade de comparar criticamente a eficácia da ED em relação a metodologias tradicionais de ensino.

Ressalta-se que metodologias tradicionais, frequentemente caracterizadas por um enfoque mais direto e sequencial no ensino de matemática, tendem a priorizar a transmissão direta de conhecimento, seguida pela prática e aplicação. Embora essa abordagem tenha seu valor, ela pode limitar a construção ativa do conhecimento pelos alunos, especialmente em tópicos de maior complexidade como os abordados neste estudo. Por outro lado, a ED e a TSD articuladas permitem uma maior flexibilidade e adaptação ao contexto específico do aprendizado e, por esta razão, foram adotadas.

As situações didáticas propostas são sugestões de aula voltadas para futuras aplicações em turmas de formação inicial de professores de matemática. Este público-alvo foi escolhido devido à relevância do tema para sua formação e à necessidade de um conhecimento matemático prévio para a resolução das situações e o avanço do tema. A implementação das situações visaria à coleta de dados e à concretização das duas últimas fases da ED.

O estudo da sequência de Leonardo e dos números quaternions permitiu uma análise separada desses objetos matemáticos. Ao associar estes dois conteúdos, chegamos aos quaternions de Leonardo, identificando sua relação de recorrência, a conexão com os quaternions de Fibonacci, sua equação característica, a Fórmula de Binet e sua função geradora. Esses resultados foram alcançados graças à abordagem metodológica proporcionada pela metodologia de pesquisa escolhida. As análises preliminares e *a priori* tiveram como objetivo fornecer suporte metodológico ao professor, instigando os alunos a construir seu próprio conhecimento a partir da TSD.

Por fim, para trabalhos futuros, espera-se que as situações sugeridas possam ser replicadas em turmas de formação inicial de professores, validando as conjecturas apresentadas. Ressalta-se o papel fundamental do docente em apresentar os elementos prévios essenciais para a resolução das situações e em criar um ambiente de discussão que auxilie os alunos no processo de construção do conhecimento.

Agradecimentos

A parte de desenvolvimento da pesquisa no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). A parte de desenvolvimento da pesquisa em Portugal é financiada por Fundos Nacionais, através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia. I. P (FCT), no âmbito o projeto UID/CED/00194/2020.

Referências

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Educação matemática**: Fundamentos da Didática da matemática. Curitiba: Editora UFPA, 2007.

ALVES, Francisco R.; VIEIRA, Renata P. Estudo da sequência Leonardo do Newton Fractal com o Google Colab. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 15, n. 2, p. 1-9, 2020.

ALVES, Francisco R.; CATARINO, Paula M.; VIEIRA, Renata P.; MANGUEIRA, Milena C. Teaching recurrent sequences in Brazil using historical facts and graphical illustrations. **Acta Didactica Napocencia**, v. 13, n. 1, p. 1-25, 2020.

ALVES, Francisco R.; VIEIRA, Renata P.; CATARINO, Paula M. Engenharia Didática: análises preliminares e a priori para a noção dos Quaternions de Fibonacci. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 13, n. 3, p. 308-320, 2020.

ALVES, Francisco R.; MANGUEIRA, Milena C.; CATARINO, Paula M.; VIEIRA, Renata P. Didactic Engineering to Teach Leonardo Sequence: A Study on a Complexification Process in a Mathematics Teaching Degree Course. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 16, n. 3, p. em0655, 2021.

ALVES, Francisco R.; CATARINO, Paula M. Brasil X Portugal: pesquisas desenvolvidas no âmbito do ensino da história da matemática sobre sequências numéricas recorrentes. **Revista de História da Educação Matemática**, v. 8, p. 1–23, 2022.

ARTIGUE, Michèle. Ingénierie didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 9, n. 3, p. 281–308, 1988.

ARTIGUE, Michèle. Perspectives on design research: the case of didactical engineering. *In*: BIKNER-AHSBAHS, A.; KNIPPING, C.; PRESMEG, N. **Approaches to qualitative research in mathematics education**, Springer, 2014. (p. 467–496).

BROUSSEAU, Guy. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 7, n. 2, p. 33–115, 1986.

BROUSSEAU, Guy. **Theory of Didactical Situations in Mathematics***:* Didactique des mathématiques 1970-1990. Kluwer Academic Publishers, 2002.

CATARINO, Paula M. BORGES, Anabela. On Leonardo numbers. **Acta Mathematica Universitatis Comenianae**, v. 89, n. 1, p. 75-86, 2019.

GÖKBAŞ, Hasan. A New Family of Number Sequences: Leonardo-Alwyn Numbers. **Armenian Journal of Mathematics**, v. 15, n. 6, p. 1–13, 2023.

HORADAM, Alwyn F. Quaternion Recurrence relations. **Ulam Quarterly**, v. 2, n. 2, p. 23- 33, 1993.

İŞBILIR, Zehra; AKYIĞIT, Mahmut; TOSUN, Murat. Pauli–Leonardo quaternions. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 29, p. 1-16, 2023.

MENON, Márcio J. Sobre as origens das definições dos produtos escalar e vetorial. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 31, n. 2, p. 1-11, 2009.

MANGUEIRA, Milena C.; ALVES, Francisco R.; CATARINO, Paula M. Os números híbridos de Leonardo. **Ciência & Natura**, v. 43, p. e82, 2021a.

MANGUEIRA, Milena C.; ALVES, Francisco R.; CATARINO, Paula M. Os biquaternions elípticos de Leonardo. *C.Q.D.* - **Revista Eletrônica Paulista de Matemática***,* v. 21, p. 130-139, 2021b.

MANGUEIRA, Milena C.; VIEIRA, Renata P.; ALVES, Francisco R.; CATARINO, Paula M. A generalização dos duais e sedênios de Leonardo. *C.Q.D.*– **Revista Eletrônica Paulista de Matemática,** v. 20, p. 13–27, 2021c.

MANGUEIRA, Milena C.; VIEIRA, Renata P.; ALVES, Francisco R.; CATARINO, Paula M. Uma Experiência da Engenharia Didática No Processo de Hibridização aa Sequência De Leonardo. **Revista Binacional Brasil-Argentina**: Diálogo Entre as Ciências*,* v. 10, n. 2, p. 271-297, 2021d.

MANGUEIRA, Milena C.; ALVES, Francisco R.; CATARINO, Paula M. Hybrid Quaternions of Leonardo. **Trends in Computational and Applied Mathematics***,* v. 23, n. 1, p. 51-62, 2022a.

MANGUEIRA, Milena C.; ALVES, Francisco R.; CATARINO, Paula M. Os Números Híbridos de *K*-Leonardo. **Brazilian Electronic Journal of Mathematics***,* v. 3, n. 5, 2022b.

MANGUEIRA, Milena Carolina dos Santos. **Engenharia Didática**: Um processo de hibridização e hipercomplexificação de sequências lineares recursivas*.* 273f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2022.

MANGUEIRA, Milena C.; VIEIRA, Renata P.; ALVES, Francisco R.; CATARINO, Paula M. The sequence of the hyperbolic k-Perrin and k-Leonardo quaternions. **Journal of Mathematical Extension***,* v. 17, n. 4, p. 1-16, 2023.

OLIVEIRA, Rannyelly Rodrigues. de. **Engenharia Didática sobre o Modelo de Complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci**: Relações Recorrentes N-dimensionais e Representações Polinomiais e Matriciais. 222f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática). Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza, 2018.

PRASAD, Kalika; MOHANTY, Ritanjali; KUMARI, Munesh; MAHATO, Hrishikesh. Some new families of generalized *k*-Leonardo and Gaussian Leonardo Numbers*.* **Communications in Combinatorics and Optimization***,* 2023.

SHANNON, Anthony. G. A note on generalized Leonardo numbers. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics***,* v. 25, n. 3, p. 97-101, 2019.

VIEIRA, Renata P.; MANGUEIRA, Milena C.; ALVES, Francisco R.; CATARINO, Paula M. A forma matricial dos números de Leonardo. **Ciência & Natura**, v. 42, 2020.

VIEIRA, Renata P.; ALVES, Francisco R.; CATARINO, Paula M. Relações bidimensionais e identidades da sequência de Leonardo. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 4, n. 2, p. 156-173, 2019.

VIEIRA, Renata P.; MANGUEIRA, Milena C.; ALVES, Francisco R.; CATARINO, Paula M. Leonardo's three-dimensional relations and some identities. **Notes On Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 27, n. 4, p. 32-42, 2021a.

VIEIRA, Renata P.; MANGUEIRA, Milena C.; ALVES, Francisco R.; CATARINO, Paula M. As relações recorrentes *n*-dimensionais de Leonardo. **Ciência & Natura**, v. 43, p. e89, 2021b.

Nota

---

[i] Os números hipercomplexos são definidos a partir de um processo evolutivo, partindo da sua forma unidimensional e apresentando *n* variáveis, esses números são apresentados na forma: $G = n_1, n_2, n_3, \ldots n_n$.

Sobre os autores

Milena Carolina dos Santos Mangueira
Licenciada em Matemática pela Universidade do Estado do Rio Grande do Norte (UERN). Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará - IFCE. Doutoranda em Ensino pela Rede Nordeste de Ensino (RENOEN), campus Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE e bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq.
Email: milenacarolina24@gmail.com **ORCID:** https://orcid.org/0000-0002-4446-155X

Francisco Regis Vieira Alves
Possui graduação em Bacharelado em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (1998), graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (1997), mestrado em Matemática Pura pela Universidade Federal do Ceará (2001) e mestrado em Educação, com ênfase em Educação Matemática, pela Universidade Federal do Ceará (2002). Doutorado com ênfase no ensino de Matemática (UFC - 2011). Atualmente é professor TITULAR do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do estado do Ceará/ IFCE, do curso de Licenciatura em Matemática e Bolsista de Produtividade em Pesquisa do CNPq - Nível 2 (2020 - 2026). Professor do Doutorado em Associação em Rede de Pós-Graduação em Ensino (RENOEN) e do Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática do Mestrado Profissional em Educação Profissional Tecnológica PROEPT-IFCE. Coordenador do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática - PGECM/IFCE (acadêmico). no período de 2015/2020 e coordenador do primeiro doutorado no Instituto Federal de Ciências e Tecnologia do Estado do Ceará - IFCE (2022 -). Avaliador externo de projetos de pesquisa do Doutorado (profissional) em Didática de Ciências e Tecnologia da Universidade de Trás-os-Montes (UTAD) - Portugal. **Email:** fregis@ifce.edu.br
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3710-1561

Paula Maria Machado Cruz Catarino
Doutora em Matemática. Professor Catedrático da UTAD (Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro). Investigador do Centro de Investigação CMAT-UTAD- Polo do CMAT da Universidade do Minho e também Investigador do Centro de Investigação CIDTFF - Centro de Investigação "Didática e Tecnologia na Formação de Formadores. Atualmente Membro do Conselho Geral da UTAD. Autor de artigos em revistas científicas internacionais com revisão por pares. **Email:** pcatarino23@gmail.com **ORCID:** https://orcid.org/0000-0001-6917-5093

Recebido em: 03/05/2024
Aceito para publicação em: 17/09/2024