Programa de Pós-Graduação em Educação
Universidade do Estado do Pará
Belém-Pará- Brasil

Revista Cocar

Revista Cocar. Edição Especial. N.14/2022 p.1-16 ISSN: 2237-0315
Dossiê: Tendências de Educação Matemática

Problemas na Sala de Aula de Matemática: Propor para ensinar, resolver para aprender

Problems in the Mathematics Classroom: Propose to teach; resolve to learn

Márcio Pironel
Instituto Federal de São Paulo (IFSP)
Salto – São Paulo – Brasil

Rosineide de Sousa Jucá
Universidade do Estado do Pará (UEPA)
Belém – Pará – Brasil

Lourdes de la Rosa Onuchic
Universidade Estadual Paulista (UNESP)
Rio Claro – São Paulo – Brasil

Resumo
A COVID-19 é mais que uma doença, é um problema a ser resolvido pela sociedade e a resolução de qualquer problema implica na utilização de conhecimento acumulado anteriormente, da busca por problemas correlatos e da escolha de ferramentas, estratégias e procedimentos adequados para atacar o problema. O resultado esperado é a resolução do problema e a construção de novos conhecimentos. A partir dessa analogia, iniciamos uma discussão sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Este artigo tem a pretensão de mostrar sua gênese e discutir alguns de seus aspectos mais relevantes.
Palavras-chave: Resolução de Problemas; Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática; Sala de aula.

Abstract
COVID-19 is more than a disease, it is a problem to be solved by the society and solving any problem implies using previously accumulated knowledge, searching for related problems and choosing appropriate tools, strategies and procedures to attack the problem. The expected result is the resolution of the problem and the construction of new knowledge. From this analogy, we start a discussion about the Teaching-Learning-Assessment Methodology of Mathematics through Problem Solving. This article intends to show its genesis and discuss some of its most relevant aspects.
Palavras-chave: Problem Solving; Teaching-Learning-Assessment of Mathematics; Classroom.

Introdução

A vida nos propõe os maiores problemas e a história da humanidade tem nos mostrado isso. O final da segunda década do século XX foi marcada pela chegada de uma grande pandemia. Segundo Spinney (2017), a gripe espanhola infectou cerca de um terço da população do planeta, estimada em um bilhão de pessoas, dizimando algo entre 2,5% e 5% desse total. O mundo estava diante de um grande problema e precisava resolvê-lo.

> Primeiro, precisavam compreender a epidemiologia da gripe, como se comportava e se espalhava. Cientistas já tinham aprendido a controlar a cólera, a febre tifoide, a febre amarela, a malária, a peste bubônica e outras doenças, ao entender sua epidemiologia antes mesmo de desenvolverem uma vacina ou a cura.
> Em segundo lugar, precisavam aprender sobre sua patologia, os danos causados ao corpo, o exato curso da doença. Isso também lhes possibilitaria intervir de alguma forma que fosse capaz de salvar vidas.
> Em terceiro lugar, precisavam saber o que o patógeno era, qual micro-organismo causava a gripe. Isso poderia lhes permitir encontrar um modo de estimular o sistema imunológico para evitar ou curar a doença. Também era possível que, ainda que não conhecessem a causa exata, pudessem desenvolver um soro ou uma vacina. (BARRY, 2020, p. 282)

Ou seja, ao se deparar com uma situação-problema, a comunidade científica concentrou seus esforços em compreender o problema com todas as suas nuanças e particularidades para que pudessem atacá-lo na busca de ações que pudessem solucioná-lo. Essa é a principal característica de um problema: uma situação que precisamos resolver, mas não sabemos de início como fazer, e necessita do emprego de ferramentas, procedimentos e estratégias.

No caso da gripe espanhola, pesquisadores concluíram, acertadamente, que somente "o isolamento impiedoso e rigoroso e a quarentena poderiam desacelerar seu progresso" (BARRY, 2020, p.282). Como o vírus se espalhava pelo ar, barreiras físicas, já utilizadas em outras epidemias anteriores, como o uso de máscaras e a higiene pessoal (lavar as mãos com uma regularidade maior ou a utilização de elementos bactericidas para desinfetá-las) também poderiam contribuir para uma diminuição da transmissão do vírus. Essas posturas, obtidas através do processo de resolução do problema apresentado, embora não tivessem sido a solução para o problema em si, produziram novos conhecimentos que poderiam ser utilizados futuramente em casos correlatos. E foi o que ocorreu em outras epidemias que aconteceram pelo mundo afora durante o século passado.

Pouco mais de uma centena de anos depois, o vírus SARS-COV-2 nos trouxe um novo problema a ser resolvido. Uma doença completamente nova e desconhecida, com uma taxa de transmissibilidade bastante alta que fez com que pesquisadores de todo o mundo se dividissem em grupos com dois objetivos bastante claros: Aprender mais sobre o vírus e sobre a doença e; descobrir uma solução para erradicar a COVID-19 (causada pelo vírus SARS-COV-2) da face da terra. Inicialmente, o único procedimento possível e, seguramente, eficaz contra o alastramento devastador da doença era aquele considerado um século antes, o isolamento social.

A COVID-19 surgiu, provavelmente, na província chinesa de Wuhan no final do ano 2019 da era cristã e, no final do dia 30 de janeiro do ano seguinte, a Organização Mundial de Saúde - OMS declarou *Emergência de Saúde Pública de Interesse Internacional* (STRODS; BERKA; LINNEY, 2021). O procedimento natural de contenção do vírus e, consequentemente, da doença trouxe outros problemas à sociedade como um todo. Dentre esses problemas, destacamos a questão educacional. Como deveriam ser as aulas num cenário pandêmico com restrições na locomoção e proibição dos encontros presenciais?

Ressaltamos que o objetivo de tratar esses temas neste artigo não é o de mostrar as soluções para esses problemas, mesmo porque acreditamos que muitas das respostas possíveis ainda não foram dadas, mas o de ilustrar como a resolução de problemas pode fomentar a construção de conhecimento novo, além de mobilizar o raciocínio para rememorar antigos aprendizados e possibilidades.

Nesse cenário tínhamos (e ainda temos), de um lado, pesquisadores preocupados com a principal vertente do problema que tem o objetivo de encontrar uma cura para a doença ou uma vacina contra a infecção pelo vírus e, de outro lado, professores (e pesquisadores) preocupados com os modos como deveriam ser as aulas sem a presença física dos alunos. Mais uma vez, foi necessário compreender o problema para buscar respostas que respondessem às inquietações trazidas à luz pela situação e, mais uma vez, na perspectiva da geração de novos conhecimentos.

Ressaltamos que esse movimento impulsionado pela resolução de problemas tem se repetido no decorrer da história da humanidade. D'Ambrosio (2017) destaca que:

> Desde os primeiros hominídeos, resolver problemas e lidar com questões do cotidiano têm sido essenciais para sobreviver. Com a evolução da espécie e a busca de entender, explicar e lidar com fenômenos naturais e do psico-emocional, a Resolução de Problemas adquire outra dimensão. Vai além de uma ferramenta prática, para lidar com questões materiais, e adquire características de um sofisticado exercício intelectual. (D'AMBROSIO, 2017, p. 11)

Ressaltamos que sempre houve um problema na gênese da construção de qualquer conhecimento e é o processo de resolução dos problemas que mais contribui, entre outras coisas, para o desenvolvimento de tecnologias, da ciência e da matemática. A partir do problema, o ser humano tem aprendido a entender e a intervir no desenvolvimento do mundo para transformá-lo e isso nos inspira a utilizar o problema como gerador de aprendizagens para entender e transformar a prática educativa e a aprendizagem estudantil.

Onde tudo começa?

Quando se fala no uso de problemas na sala de aula é bastante comum relacionarmos o início dessa prática à publicação do livro *How to Solve It*, que recebeu no Brasil o curioso título *A Arte de Resolver Problemas* (POLYA, 1996), pelo matemático húngaro-estadunidense George Polya, em 1944. Mas essas raízes são mais profundas. O próprio Polya publicara, em coautoria com o matemático austro-húngaro Gabor Szebö, nos anos de 1924 e 1925, os volumes I e II do livro *Problems and Theorems in Analysis*. Somando os dois volumes, Polya e Szebö apresentam mais de dois mil problemas distintos que abrangem desde o Ensino Fundamental até o Ensino Superior. No prefácio à primeira edição Polya e Szebo (1976) dizem que:

> Pode-se abordar o livro com o objetivo de encontrar nele oportunidade de prática para si mesmo, para seus alunos, ou simplesmente para leitura. Uma maneira adequada de usá-lo para cada propósito específico pode ser encontrada de um jeito bastante natural.
>
> Os capítulos iniciais de cada uma das partes exigem conhecimento prévio relativamente pequeno. As diferentes partes são, embora não inteiramente, amplamente independentes umas das outras, e também a conexão entre as seções da mesma parte são frequentemente independentes, de modo que, por exemplo, não se exige que se mantenha escrupulosamente essa sequência de tópicos.
>
> O leitor que deseja resolver um problema deve pensar não apenas no que é perguntado, mas também como e onde. Muitos problemas, que seriam intratáveis mesmo para um aluno avançado se colocados de forma isolada, são aqui cercados por problemas preparatórios e explicativos e apresentados num contexto em que, com alguma perseverança e um pouco de inventividade, seja possível dominá-los.
>
> [...] As dicas estão à disposição do leitor, mas não devem ser imposições. Se você não conseguir resolver um problema, não se desespere. O "método socrático de ensino" não visa instruir as pessoas a dar respostas rápidas, mas educar por meio de perguntas. (POLYA; SZEVÖ, 1976, p. XI – tradução nossa)

Ou seja, ao menos vinte anos antes do lançamento de sua mais festejada obra, Polya se preocupava com a ideia da utilização da resolução de problemas no processo educacional permeada pelo método dialético de Sócrates. É possível encontrar essa preocupação latente em outros pensadores de sua época, e antes dela inclusive. Dewey, em sua obra *How we* *thinks*, escrita originalmente em 1910, sugere que poderíamos estender o conceito de "problema" a tudo aquilo que nos surpreende e nos desafia a ponto de se tornar uma crença incerta, de modo que toda experiência de mudança repentina ocasionaria a elaboração de um problema ou de uma pergunta (DEWEY, 1989).

Dewey (1989) sugere que "o pensamento não é algo com uma combustão espontânea, [...]. Algo deve provocá-lo e invocá-lo" (p. 30) e vemos na resolução de problemas esse caráter de desafio e de provocação que permite ao professor a invocação do pensamento do aluno. Mais do que isso, Dewey (1989) critica a utilização de exercícios mecânicos e processos de imitação nos processos educacionais. Segundo ele, tais procedimentos são fatais à capacidade reflexiva do estudante e, embora alcancem os resultados esperados mais rapidamente, levam os alunos à leitura com pouquíssima expressão e à realização de cálculos sem nenhuma ou com pouca compreensão dos elementos neles envolvidos ou dos problemas apresentados (DEWEY, 1989). É importante ressaltar que tais afirmações foram feitas ainda no final da primeira década do século XX, muito antes das considerações de Polya.

De qualquer modo, o trabalho com a Resolução de Problemas na sala de aula permaneceu durante muito tempo adormecida, principalmente pelo advento da Matemática Moderna. Somente em 1980, quando o National Council of Teachers of Mathematics – NCTM lançou um documento chamado *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980's,* o tema voltou a ser considerado e passou a figurar entre as principais preocupações da matemática escolar, tanto nos Estados Unidos da América quanto do resto do mundo.

O NCTM (1980), apresenta uma agenda de ações para uma década que se iniciava. A primeira e mais forte recomendação dessa agenda dizia que a Resolução de Problemas deveria se tornar o principal foco da Matemática Escolar dos anos 1980.

A partir daí o livro *How to Solte It* foi, verdadeiramente, redescoberto e se transformou em leitura obrigatória para professores e pesquisadores preocupados com o desenvolvimento da matemática escolar. As críticas de Polya (1995) eram destinadas ao ensino da matemática dos anos de 1940, mas se encaixavam perfeitamente na conjuntura educacional dos anos 80. Claramente inspirado nas ideias de Dewey (1989), Polya (1995) descreve a grande oportunidade que os problemas oferecem ao professor de Matemática:

> *Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar esse objetivo (POLYA, 1995, p. v).*

Além disso, *An Agenda for Action* inspirou o debate sobre a Resolução de Problemas. Muitas das mais influentes obras, publicadas na década de 80, continuam a influenciar as pesquisas e o uso de Resolução de Problemas no ensino de matemática até hoje. Pironel (2019) destaca o livro *Thinking Mathematically* (1985), de Mason, Burton e Stacey; o artigo *Problem formulating: Where do Good Problems come from?* (1987), de Kilpatrick; e o livro *Mathematical Problem Solving* (1985), escrito por Schoenfeld e conhecido como o "livro negro" da Resolução de Problemas.

Essas publicações abordam heurísticas e modos de abordagem da Resolução de Problemas na matemática escolar e suportaram, suportam até hoje, inúmeros trabalhos sobre a Resolução de Problemas desde então. Schroeder e Lester (1989) no final dos anos de 1980 publicaram o artigo *Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving* no livro *New Directions for Elementary School Mathematics*, o Yearbook 1989 do NCTM, que se tornou o gérmen das ideias desenvolvidas pelo Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas – GTERP ao sugerir, como possibilidade, que o ensino da Matemática pudesse ocorrer através da Resolução de Problemas.

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas - MEAAMaRP

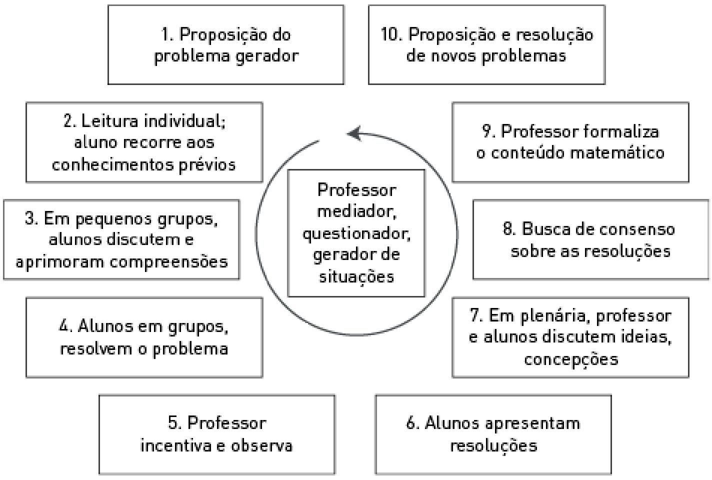
Parece não haver dúvidas sobre o quanto a geração, a formulação, a proposição e a resolução de problemas têm feito a roda da História girar. Conforme relatamos na introdução deste artigo, os desenvolvimentos da ciência, da tecnologia e da vida têm se dado, ciclicamente, a partir da resolução dos problemas que nos são apresentados. O ser humano é, muitas vezes, causador e, em inúmeras outras vezes, formulador desses problemas.

O problema faz com que o ser humano articule conhecimentos anteriormente acumulados, muitas vezes esquecidos ou latentes, e constrói um conhecimento novo. Esse *novo* conhecimento não precisa ser necessariamente inédito, desde que responda à inquietação despertada pela situação problemática e seja novidade para o resolvedor. Esse é o cerne da MEAAMaRP.

A MEAAMaRP é, portanto, uma metodologia de ensino que considera o problema como ponto de partida e como orientação para a aprendizagem de matemática e a construção do conhecimento ocorre através da resolução desse problema. Além disso, professor e alunos desenvolvem juntos o trabalho e a aprendizagem acontece colaborativamente na sala de aula (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, ALLEVATO; ONUCHIC, 2009, 2021, ALLEVATO; JAHN; ONUCHIC, 2017).

No esquema a seguir (Figura 1), Allevato e Onuchic (2021) procuram sintetizar um conjunto de 10 etapas possíveis para o desenvolvimento dessa metodologia:

Figura 1: Esquema da metodologia



Fonte: ALLEVATO; ONUCHIC, 2021, p. 42

O conjunto dessas etapas constitui apenas uma das possibilidades de condução de uma aula de matemática que utilize a MEAAMaRP, mas não é a única possibilidade, principalmente porque, como dito por Allevato e Onuchic (2011, p. 82), *"não há formas rígidas de se trabalhar através da resolução de problemas na sala de aula de Matemática"*. O importante é que seja mantido o cerne da metodologia a partir de um problema gerador construir conhecimento matemático novo.

A aula de matemática, nessa perspectiva, é bastante dinâmica e, por esse motivo, as etapas podem ser alteradas ou adaptadas, de acordo com as necessidades percebidas pelo professor. Essas necessidades são percebidas durante um processo de avaliação constante que ocorre desde a concepção da atividade a ser trabalhada, segue acontecendo durante toda a aula e continua depois que ela acaba, com a análise dos dados coletados e registrados pelo professor (PIRONEL; ONUCHIC, 2016).

Pode ser, por exemplo, que a intervenção do professor tenha que ir além da troca consciente de *feedback*, com o professor assumindo, momentaneamente, uma postura mais tradicional para dissipar quaisquer dúvidas que estejam a alavancar o processo de resolução do problema. Essa intervenção mais assertiva só deve ocorrer quando o professor perceber que os questionamentos não estão levando a um resultado satisfatório porque o aluno não domina os conteúdos que deveria saber, satisfatoriamente, para a resolução do problema. Quando esse tipo de situação acontece, o professor precisa agir com discrição e cautela, para que o seu discurso não atrapalhe os objetivos almejados naquela aula.

Embora o trabalho pautado nessa perspectiva metodológica exija uma postura completamente nova na sala de aula, tanto de professores quanto de alunos, conforme nos mostram o NCTM (2014):

Quadro 1: O papel de professores e alunos em tarefas que promovam e resolução de problemas

Implementar tarefas que promovam raciocínio e resolução de problemas Ações do professor e do aluno	
O que os professores fazem?	O que os alunos fazem?
Motivar o aprendizado dos alunos sobre a matemática através de oportunidades para explorar e resolver problemas que desenvolvam e ampliem sua compreensão matemática atual. Selecionar tarefas que forneçam múltiplos pontos de partida através do uso de várias ferramentas e representações. Propor tarefas regularmente, que exijam um alto nível de demanda cognitiva. Apoiar os alunos na exploração de tarefas sem assumir o pensamento dos alunos. Incentivar os alunos a usar abordagens e estratégias variadas para entender e resolver problemas.	Perseverar na exploração e no raciocínio através de tarefas. Responsabilizar-se pela compreensão das tarefas, recorrendo e fazendo conexões com seu entendimento pregresso e com suas ideias. Usar ferramentas e representações, conforme necessário, para apoiar seus pensamentos e a resolução de problemas. Aceitar e esperar que seus colegas de classe usem uma variedade de abordagens de solução e que eles discutam e justifiquem suas estratégias um para o outro.

Fonte: NCTM (2014, p. 24, tradução nossa)

Apesar disso, Allevato e Onuchic (2011) listam uma série de motivos para que esse esforço em mudar seja feito:

> - Resolução de problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas e sobre o dar sentido.
> - Resolução de problemas desenvolve poder matemático nos alunos, ou seja, capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos.
> - Resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido; a confiança e a autoestima dos estudantes aumentam.

> - Resolução de problemas fornece dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar os alunos a obter sucesso com a matemática.
> - Professores que ensinam dessa maneira se empolgam e não querem voltar a ensinar na forma dita tradicional. Sentem-se gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios.
> - A formalização dos conceitos e teorias matemáticas, feita pelo professor, passa a fazer mais sentido para os alunos. (ALLEVATO; ONUCHIC, 2011, p. 82)

Além disso, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC indica a formulação e a resolução de problemas como competências da Educação Básica, tanto competências gerais quanto específicas da Matemática, segundo Brasil (2018):

> Convém reiterar a justificativa do uso na BNCC de "Resolver e Elaborar Problemas" em lugar de "Resolver Problemas". Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada. (BRASIL, 2018, p. 536)

Outra importante publicação, que inclusive inspirou a criação da BNCC brasileira, o *Common Core State Standards for Mathematics*, do *National Governors Association Center for Best Practices – NGA Center e do Council of Chief State School Officers – CCSSO*, lançada em 2010 complementa essas ideias ao considerar o protagonismo da Resolução de Problemas na Educação Básica dos Estados Unidos da América. De acordo com esse documento, o padrão para a prática matemática exige que o aluno dê sentido aos problemas e persevere para resolvê-los, que saiba raciocinar abstrata e quantitativamente, que possa construir argumentos viáveis para defender suas ideias e criticar o raciocínio de outros, que saiba construir modelos matemáticos, que consigam utilizar ferramentas adequadas estrategicamente, que estejam atentos à precisão de seus cálculos, que procurem padrões e estruturas matemáticas e os utilizem com compreensão e que consigam perceber e expressar raciocínios repetidos (NGA; CCSSO, 2010).

Ensino, aprendizagem e avaliação interrelacionando-se na sala de aula

Quando se opta por trabalhar com a MEAAMaRP é preciso compreender que não há, a priori, o momento do ensino, o momento da aprendizagem e o momento da avaliação, esses processos coexistem durante a aula e, muitas vezes, não há como identificá-los claramente. Por esse motivo, o GTERP adota o termo Ensino-Aprendizagem-Avaliação conectados por hifens formando uma única palavra composta.

Nesta seção apresentaremos um fragmento de aula realizada através da MEAAMaRP. Pironel (2019), em sua pesquisa de doutorado, pesquisou sobre o modo como o processo de avaliação para a aprendizagem acontece de fato durante uma aula que utilize essa metodologia. Ele acompanhou uma classe de 7º ano, com 27 alunos, do Colégio Pedro Arrupe, em Lisboa, durante um semestre letivo e elaborou, conjuntamente com a professora regente, uma série de 5 cinco problemas geradores que foram trabalhados por ela na sala de aula. Durante as atividades de resolução de problemas, os alunos foram divididos em 6 grupos com 4 alunos cada e um sétimo grupo com 3 alunos apenas. Nesse sétimo grupo ficavam, invariavelmente, três alunos cujos pais não autorizaram a gravação de vozes e nem a recolha do material produzido, de modo que a pesquisa ficou restrita a um grupo de 24 alunos (PIRONEL, 2019).

Aparelhos de captura de áudio foram estrategicamente distribuídos em quatro dos seis grupos participantes da pesquisa e um quinto aparelho ficou durante todo o tempo com a professora da sala.

No início da aula cada aluno recebeu uma folha com o seguinte problema: Um livro custa € 1,00 mais a metade do seu preço. Qual é o preço do livro?

O objetivo da aula foi o de definir os Princípios de Equivalência para a resolução de equações. Através da resolução desse problema pretendia-se que o aluno construísse, a partir das ideias de equivalência de equações, a resolução de equações polinomiais do primeiro grau. Resumidamente, a atividade foi entregue aos alunos, que deveriam resolver o problema colaborativamente em seus grupos. Depois, o professor-pesquisador e a professora da sala assumiram uma postura de observadores e, em seguida, iniciaram algumas intervenções do tipo questionamento – *feedback* – questionamento. Essa etapa é bastante relevante para o sucesso da atividade pois, além de ser uma etapa de ataque ao problema, também é um momento em que a avaliação para a aprendizagem acontece mais fortemente.

Pironel (2019) relata que o tempo estipulado para a conclusão da atividade precisou ser estendido e a aula terminou sem que a atividade pudesse ter sido completada. O gerenciamento do tempo é um fator limitante da Metodologia, porém essa interrupção não é algo necessário. Essa pausa, ocorrida de um dia para outro, pode favorecer uma maior reflexão, pelos alunos, sobre os processos de resolução e acreditamos que possa oferecer um tempo para que o estudante realize pesquisas, releia o problema mais tranquilamente, sem o estresse da contagem regressiva do tempo e possa terminar a atividade, em outra aula, com um maior amadurecimento das ideias.

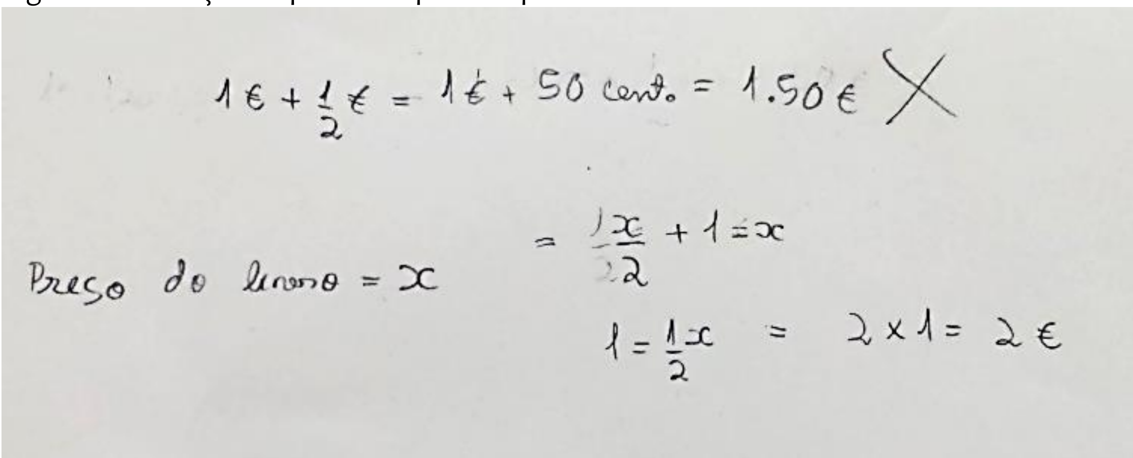
Na aula seguinte, os alunos receberam de volta suas atividades, que não puderam levar para casa, e cada grupo colocou a resposta no quadro para o início da discussão plenária.

Dando início ao debate, a professora disse:

– *Agora vamos rapidamente ouvir os grupos. Nós vamos dar a palavra, mas não vamos confirmar se está certo ou não. Quem vai falar pode ter razão ou não.*

Após as discussões, a resposta dada pelo Grupo 1 (Figura 2) foi eleita pelos alunos como a mais adequada. Reproduzimos abaixo um diálogo importante da busca pelo consenso.

Figura 2: Resolução do problema pelo Grupo 1



Fonte: PIRONEL (2019, p. 198)

Professora: *Marina, conta para a sala como fizeste.*

Marina: *Primeiro pensamos sem realizar conta mesmo, mas depois realizamos a conta.*

Professora: *Erraram no início? Tentativas erradas? Passaram por isso?*

Marina: *Sim, sim, várias.*

Professora: *Então, qual foi a primeira ideia?*

Marina: *A primeira ideia nossa ao ler o enunciado... pensamos que era um e meio, porque era um euro mais meio. Depois pensamos melhor e vimos que a pergunta tinha um "rastapé".*

Professora: *Vocês dizem isso, eu não sei o que é.*

Professor-Pesquisador: *"Rastapé" é uma pegadinha, uma armadilha?*

Marina: *Sim... e depois nós pensamos… se um livro custa um euro mais a metade do seu preço. Então isso é x. E nós verificamos que a metade do preço é o "um euro", então o preço equivale a 2 euros.*

Professora: *Então, a conclusão que x é igual a 2 euros? Verificaram a validade da resposta?*

Marina: *Verificamos. Fizemos um mais dois dividido por dois, que é igual a dois.*

Após a apresentação das resoluções pelos grupos, a professora Tânia tomou a palavra e disse:

Professora: *Vamos tomar a resolução do grupo da Marina. Eles propuseram que a resposta para o problema era a resposta para a equação* (e escreveu no quadro):

$$1 + \frac{x}{2} = x$$

Professora: *O objetivo, na resolução de uma equação, é, mantendo uma relação de equações equivalentes, encontrar o valor de x. Pensem comigo, o que podemos tirar de ambos os membros da equação e ainda assim manter a igualdade? Ana? Betina? ...*

Rinaldo: *Podemos tirar "x sobre dois" dos dois membros.*

Professora: *Muito bem, por que tirar "x sobre dois"?*

Gabriel: *Se fizer isso, chega-se no que a Marina mostrou. (apontando à resolução do grupo 1 que indicava:* $1 = \frac{x}{2}$*).*

A professora escreveu: $1 + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = x - \frac{x}{2} <=> \ 1 = \frac{x}{2}$ e perguntou:

Professora: *Pois... e agora? Como chegamos a uma equação equivalente a esta em que apareça a incógnita isolada em um termo?*

Mario: *x igual a dois é uma equação equivalente a essa, não é?*

Professora: *Sim, mas que operações podes realizar para chegar a ela?*

Mario: *Multiplica por dois.*

Então a professora Tânia escreve: $1 \cdot\ 2 = \frac{x}{2} \cdot 2 <=> x = 2.$

E propôs a formalização:

Princípio da adição: Se a = b, então **a + c = b + c** e **a – c = b – c**.

Princípio da multiplicação: Se a = b, então **a · c = b · c**, com c ≠ 0.

Antes de encerrar, ela questiona:

Professora: *Jonas, explica por que o* **c** *é diferente de zero.*

Jonas: *Multiplicar por zero vai tornar a expressão toda igual a zero.*

Para o professor, a aula não se encerra em si. Como a MEAAMaRP é, por sua natureza, um instrumento de avaliação para a aprendizagem (PIRONEL, 2019), sugerimos que o professor realize, sempre que possível, uma meta-avaliação, ou seja, uma avaliação da avaliação realizada durante a aula. Para isso, Pironel e Vallilo (2017) sugerem uma série de questões sobre as quais o professor pode pautar sua reflexão:

> - Os conceitos, raciocínios e habilidades dos alunos sobre os conteúdos trabalhados foram evidenciados pela avaliação?
> - A finalidade da avaliação foi atingida?
> - O tempo para a realização da atividade foi suficiente?
> - Os alunos se engajaram na realização da tarefa? Se não, por quê?
> - A avaliação proposta possibilitou aos alunos expressarem seu raciocínio, demonstrando, ou não, algum conhecimento sobre os conteúdos de matemática trabalhados?
> - Houve efetiva aprendizagem de matemática pelos alunos durante a realização da atividade?
> - Como essa atividade poderia ser melhorada? (PIRONEL; VALLILO, 2017 p. 301-302)

Dores e delícias da aprendizagem através da Resolução de Problemas

Um dos principais desafios quando se trabalha com a MEAAMaRP diz respeito à volatilidade do tempo que os alunos demorarão para completar a tarefa. O professor precisa estimar um tempo, mas é preciso estar atento para a possibilidade de ampliação (ou redução) do tempo previsto, ressaltando que o professor possui responsabilidade com o conteúdo curricular que deverá ser trabalhado durante o ano letivo. Para diminuir esse tipo de dificuldade, Van de Walle (2009) sugere que o professor se detenha por mais tempo em ideias-chave da Matemática, que se referem àqueles conteúdos se relacionam entre si.

O professor lida com o inesperado e *"o inesperado torna-se possível e se realiza; vimos com frequência que o improvável se realiza mais do que o provável; saibamos, então, esperar o inesperado e trabalhar pelo improvável"* (MORIN, 2000, p. 92).

Outra dificuldade se refere ao atendimento aos grupos formados. A observação é fundamental para que o professor possa intervir mais cuidadosamente no trabalho de grupos que apresentem maiores dificuldades. Mesmo trabalhando em grupos, o volume de pedidos de intervenção pelos alunos (o professor precisa estar preparado) pode ser maior do que o imaginado.

Por outro lado, o trabalho colaborativo realizado pelos alunos pode auxiliar no desenvolvimento do espírito de equipe e de solidariedade e fazer aflorar o senso de liderança

(PIRONEL, 2019). Se os elementos dos grupos estiverem em diferentes estágios, com relação aos processos de aprendizagem, o trabalho em grupo pode ser uma oportunidade de democratização do ensino e socialização de conhecimentos. Através da interação com os colegas, os estudantes têm condições de orientar os colegas com maiores dificuldades e potencializar a construção do conhecimento tanto de um quanto do outro.

Conclusões

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas dá voz ao aluno e provoca momentos bastante interessantes de interação aluno-aluno, professor-aluno e professor-saber-aluno. A atividade apresentada neste artigo mostra que a avaliação se integra aos processos de ensino e de aprendizagem e evoca elementos que permitem a autoavaliação, tanto do professor quanto dos alunos, a coavaliação, que consiste na avaliação dos alunos por seus pares com a finalidade de auxílio mútuo. Isso tudo numa perspectiva que difere da avaliação somativa por ter como fim a aprendizagem do aluno.

O processo de resolução de problemas promove e desenvolve a compreensão conceitual e esse desenvolvimento continua a ocorrer durante toda a aula e pode transcender os limites da sala de aula. O professor propõe um problema para, através dele, ensinar e o aluno procura resolver para aprender. Se o tempo não permitir a aplicação cotidiana da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na sala de aula, é necessário encontrar condições para utilizá-la ao menos em determinadas situações pois, por seu caráter dialógico e pela sua dinâmica interativa, favorece o desenvolvimento de um pensar crítico e reflexivo e oferece possibilidades de factíveis de sucesso na aprendizagem matemática.

Referências

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino-Aprendizagem-Avaliação: por que através da Resolução de Problemas. In: ONUCHIC, L. R., ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTILIN, A. M. (Orgs.). **Resolução de Problemas**: Teoria e Prática. Jundiaí, Paco Editorial, 2021.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensinando Matemática na sala de aula através da resolução de problemas. **Boletim GEPEM**. Rio de Janeiro, n.55, p. 122-154, jul/dez 2009.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**. Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; JAHN, Ana Paula; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. O Computador no Ensino e Aprendizagem de Matemática: reflexões sob a Perspectiva da Resolução de Problemas. In. ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. **Perspectivas para a Resolução de Problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 247-278

BARRY, John M. **A Grande Gripe:** A história da gripe espanhola, a pandemia mais mortal de todos os tempos. Edição digital. Rio de janeiro: Intrínseca, 2020.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Prefácio. In. ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. **Perspectivas para a Resolução de Problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 9-12

DEWEY, John. **Cómo Pensamos:** Nueva exposición de la relación entre pensamento reflexivo y proceso educativo. Barcelona: Paidós Ibérica, 1989.

MORIN. Edgar. **Os sete saberes necessário à Educação do futuro**. 2. ed. São Paulo: Cortez; Brasília: UNESCO, 2000

NATIONAL Council of Teachers of Mathematics. NCTM. **Na Agenda for Action: An Agenda for Action:** Recommendations for School Mathematics of the 1980's. Reston: NCTM, 1980.

NATIONAL Council of Teachers of Mathematics. NCTM. **Principles to Action**: Ensuring Mathematical Success for All. Reston: NCTM, 2014.

NATIONAL Governors Association Center for Best Practices – NGA Center e do Council of Chief State School Officers – CCSSO. **Commom Core States Standards for Mathematics**. Washington, DC: NGA Center e CCSSO, 2010.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa ; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: Caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, n. 41, v. 27, p. 73-98, 2011.

PIRONEL, Márcio. **Avaliação para a Aprendizagem**: A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas em Ação. Tese de Doutorado. Rio Claro: Unesp, 2019. 297p.

PIRONEL, Márcio; VALLILO, Sabrina Aparecida Martins. O papel da Avaliação na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. In. In. ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. **Perspectivas para a Resolução de Problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 279-304

POLYA, George; SZEBÖ, Gabor. **Problems and Theorems in Analysis I**. Series. Integral Calculus. Theory of Functions. New York: Springer, 1978.

POLYA, George; SZEBÖ, Gabor. **Problems and Theorems in Analysis II**. Theory of Functions. Zeros. Polynomials. Determinants. Number Theory. Geometry. New York: Springer, 1976.

SPINNEY, Laura. **Pale Rider:** The Spanish Flu of 1918 and How it Changed. New York: Public Affairs, 2017.

STRODS, Chris; BERKA, Alex; LINNEY, Sarah. Effective Global Mobility and International Recruitment During A Pandemic. In. BURGOS, D.; TLILI, A.; TABACCO, A. **Radical Solutions for Education in a Crisis Context**: COVID-19 as an Opportunity for Global Learning. Denton: Springer, 2021.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental**: Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula. 6ª Edição. Porto Alegre: ARTMED, 2009.

Sobre os autores

Márcio Pironel
Professor Doutor em Educação Matemática. Professor do Instituto Federal de São Paulo – Campus Salto. Email: marcio.pironel@gmail.com.
Orcid: https://orcid.org/0000-0002-7360-0571

Rosineide de Sousa Jucá
Professora Doutora em Educação Ciências e Matemática. Professora da Universidade do Estado do Pará e da Secretaria de Educação do Estado do Pará. E-mail: rosejuca@gmail.com.
Orcid: https://orcid.org/0000-0002-1386-3388

Lourdes de la Rosa Onuchic
Professora Dra. Em Matemática. Professora da Universidade Estadual Paulista.
Email: lronuchic@gmail.com. Orcid: https://orcid.org/0000-0001-7713-2157

Recebido em: 16/05/2022
Aceito para publicação em: 01/06/2022