

Práticas e estratégias pedagógicas em ambiente colaborativo de modelagem matemática

Pedagogical practices and strategies in a collaborative mathematical modeling environment

Roberta Modesto Braga

Universidade Federal do Pará (UFPA)

Castanhal-Pará-Brasil

Neuma Teixeira dos Santos

Universidade Federal Rural da Amazônia (UFRA)

Capanema-Pará-Brasil

Rhômulo Oliveira Menezes

Secretaria de Estado de Educação do Estado do Pará (SEDUC-PA)

Capanema-Pará-Brasil

Resumo

Neste artigo são apresentadas três concepções associadas a práticas de pesquisadores vinculados ao Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelagem Matemática (GEMM) da Universidade Federal do Pará, registrado na plataforma em 2006. Nesse ambiente estão vinculados estudantes e pesquisadores que desenvolvem suas pesquisas em diversas linhas de investigação. O objetivo deste artigo é apresentar práticas de atividades de Modelagem Matemática (MM) fundamentadas nas concepções: contexto de trabalho colaborativo e interações; abordagem multitemática e articulação de saberes; poderes, estratégias e temas matemáticos. No desenvolvimento do texto o leitor perceberá que a MM é heterogênea e na diversidade da região amazônica, e é possível fazer Modelagem em múltiplos cenários e vários níveis de ensino, uma vez que atividades de MM poderão ser desenvolvidas em diferentes configurações práticas e teóricas.

Palavras-chave: Abordagem Multitemática; Modelagem Matemática; Poderes Matemáticos.

Abstract

In this article, three conceptions associated with the practices of researchers linked to the Research Group on Mathematical Modeling (GEMM) of the Federal University of Pará, registered on the platform in 2006 are presented. The objective of this article is to present practices of Mathematical Modeling (MM) activities based on the concepts: collaborative work context and interactions; multi-thematic approach and knowledge articulation; Mathematical powers, strategies and themes. In developing the text, the reader will notice that MM is heterogeneous and in the diversity of the Amazon region it is possible to model in multiple scenarios and different levels of education, since MM activities can be developed in different practical and theoretical configurations.

Keywords: Multithematic approach; Mathematical Modeling; Mathematical powers.

Introdução

Nos diferentes níveis de ensino, as argumentações em torno das potencialidades da Modelagem Matemática para o ensino da Matemática são constantemente discutidas em pesquisas da área. As potencialidades estão relacionadas de forma direta ao nível de ensino, mas também ao contexto desse ensino, com ênfase na problematização, na investigação, na motivação, na matematização, entre outros.

De modo geral, acreditamos que essas potencialidades alinham-se ao fato de que a Modelagem “é datada, dinâmica, dialógica e diversa” (MEYER, CALDEIRA; MALHEIROS, 2011, p. 127), por considerar que “a Modelagem não é caminho para a resposta certa, para a verdade absoluta, para as certezas. É muito mais, é um reconhecimento de que sempre há muito por aprender” (ID IBDEM). Exemplificando, podemos modelar determinada situação usando matemática numérica ou matemática contínua, o que claramente obteremos resultados numericamente diferentes, daí temos meios diversos e resultados também diversos, mas que podem ser ambos validados qualitativamente, ou ainda nos fazer retornar à reformulação de modelos matemáticos, verificação das técnicas adotadas em aproximações aos resultados.

Assim como o nível e o contexto, as concepções de quem implementa Modelagem Matemática pode amplificar suas potencialidades. O processo de ensino e aprendizagem da Matemática é pautado por diferentes abordagens, que estão atreladas às vivências e formações diferenciadas de cada educador(a). Há diferentes formas de se fazer Modelagem Matemática (MM), portanto não pode ser limitada a uma visão que enxerga MM como tendência, pois esta não apresenta somente uma inclinação ou propensão para algo, mas trata-se de uma área estabelecida fundamentada por uma vasta literatura.

Braga (2015) discorre em sua pesquisa sobre aprendizagem em MM no Ensino Superior, experiências desenvolvidas no Laboratório Experimental de Modelagem Matemática (LEMM), espaço de aprendizagem, onde tais práticas foram discutidas e analisadas pelas interações dos elementos de um sistema de atividade, na perspectiva da teoria da atividade de Engenström. O trabalho colaborativo e as interações são elementos fundamentais em atividades de Modelagem Matemática.

Menezes (2021) traz em sua pesquisa uma abordagem acerca de interações entre estudantes, mediador e conteúdos matemáticos, em práticas voltadas para o ensino de

Geometria em um ambiente *online* e síncrono, discutindo nesse cenário uma combinação de estratégias pedagógicas (interações do mediador) e poderes matemáticos (interações dos estudantes), que potencializam temas matemáticos (interações dos conteúdos matemáticos).

Santos (2021) defende uma concepção de MM livre, viabilizada pela articulação de saberes, sustentada na teoria da complexidade de Edgar Morin, que possibilita uma abordagem multitemática.

Isto posto, o objetivo deste estudo é apresentar práticas de atividades de MM fundamentadas nas diferentes concepções: contexto de trabalho colaborativo e interações; abordagem multitemática e articulação de saberes; poderes, estratégias e temas matemáticos. Tais teorias estão vinculadas a pesquisadores do Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelagem Matemática (GEMM) da Universidade Federal do Pará. O GEMM é precursor na região amazônica em pesquisas em MM na Educação Matemática, cadastrado no diretório de grupos de pesquisas do CNPq em 2006.

Trabalho Colaborativo e Interações em Modelagem Matemática

O trabalho colaborativo é resultado de estudos sobre práticas de MM como um sistema de atividade de Engeström. Teoria que tem como princípios: um sistema de atividade coletiva (elementos comunidade, regras e divisão do trabalho); Multivocalidade (diferentes sujeitos carregam consigo diferentes posições devido ao histórico de cada um, suas tradições, pontos de vista e interesses); Historicidade (transformações ao longo do tempo); Contradição (são tensões que provocam mudanças e desenvolvimento); Transformação Expansiva (superação de contradições).

O papel da interação é entendido aqui como inter-relação entre os elementos (sujeito, objeto, artefatos mediadores, regras, divisão do trabalho, comunidade) do sistema de uma atividade de Modelagem Matemática. Assim, temos que a fala e as ações dos sujeitos, bem como as tradições, interesses e repertórios construídos social e culturalmente, promovem habilidades diferentes, o que repercute na divisão do trabalho, por exemplo. Ou ainda, a troca de conhecimento em uma atividade pode reforçar a multivocalidade pela negociação de regras, pela apropriação e compartilhamento de ideias e pontos de vista diferentes. Além disso, contradições no uso de artefatos e ferramentas podem provocar superações e mudanças na tomada de decisão (BRAGA, 2015).

A organização do sistema de atividade de MM como prática vivenciada na perspectiva da teoria engestroniana, está exemplificada na figura 1:

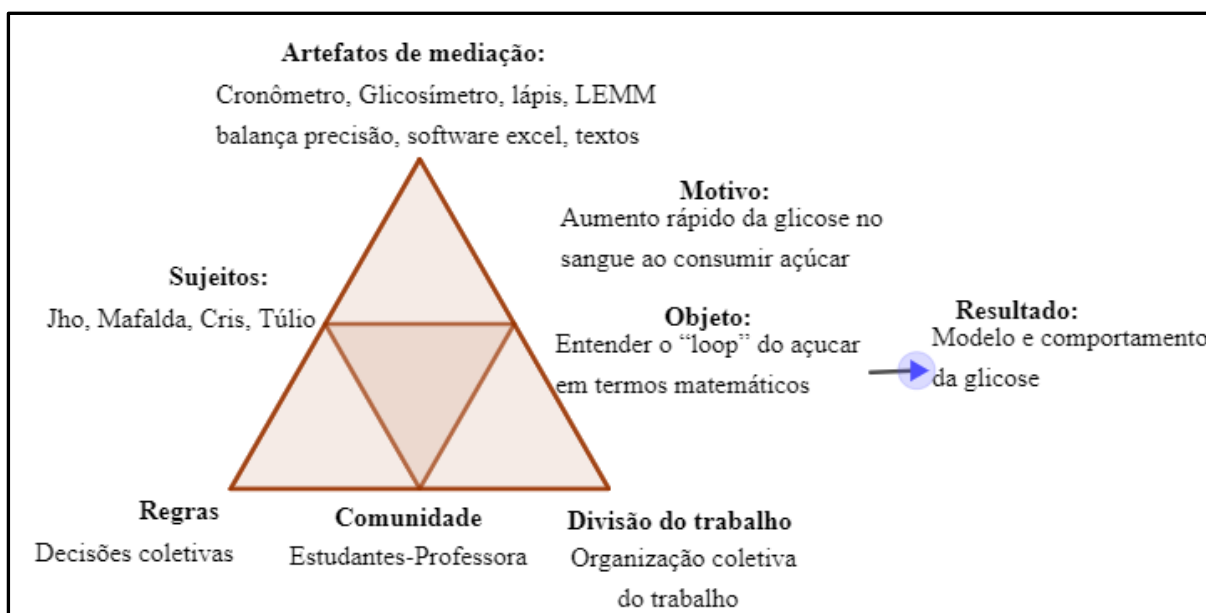


Figura 1: Modelagem Matemática como sistema de atividade do loop do açúcar

No âmbito do Laboratório Experimental de Modelagem Matemática – LEMM, é contínua a oferta de curso (60h) livre de MM, para investigação de diversas temáticas por estudantes de diferentes semestres do curso de Licenciatura em Matemática, que seguem a dinâmica de reconhecimento da Modelagem, temática comum para todos os grupos e escolha livre destes por assuntos de interesse. Das várias temáticas investigadas pelos integrantes nesse curso, selecionamos uma delas, escolha por interesse do grupo (Jho, Mafalda, Cris, Túlio), “Açúcar no sangue”, como forma de descrever objetivamente o envolvimento de estudantes ao fazer MM, bem como articulação teórica com as experiências desses estudantes e as interações evidenciadas no sistema da atividade, figura 1.

A temática “Açúcar no sangue” conduziu o grupo, composto por quatro estudantes, a estudar o comportamento de glicose no sangue e para isso realizaram experimento, planilhas, validaram o Loop infinito de açúcar no sangue para dados isolados. As primeiras leituras os levaram ao título intrigante a eles “O loop infinito do açúcar no sangue”, uma vez que as primeiras leituras sempre remetiam a questões de glicemia relacionada à pessoa com diabetes. No entanto, entender o comportamento do açúcar em termos matemáticos constituiu objeto do sistema da atividade. O quadro 1, resume a sequência do grupo.

Quadro 1: Síntese Modelagem Loop infinito do açúcar no sangue


TEMA E DECISÕES

“Loop infinito do açúcar no sangue” (escolha alunos)

EXPLORAÇÃO INICIAL, OBJETIVO E COLETA DE DADOS

Os termos associados ao loop infinito do açúcar no sangue estão associados a discussão nutricional. 1º Ativa regiões cerebrais de prazer e recompensa; 2º insulina liberada em grande quantidade; 3º insulina alta leva acúmulo de gordura; 4º baixa níveis de açúcar no sangue, “ativam” a fome e o desejo.

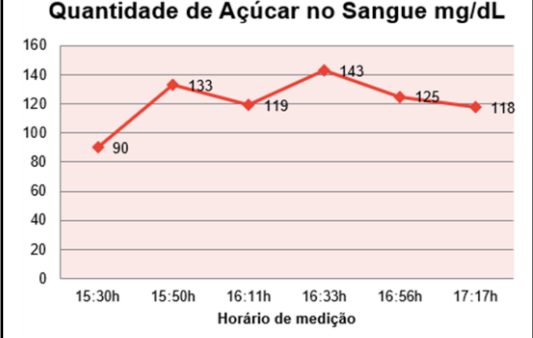
O que acontece quando ingerimos açúcar?



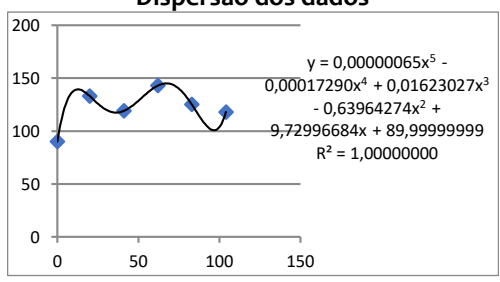
Nos interessa entender o “loop” do açúcar no sangue em termos matemáticos. O cenário para essa experimentação envolveu um indivíduo saudável, que consome açúcar ao longo do dia deliberadamente. E realizamos medições de glicemia em períodos de tempo constante, após consumo constante de açúcar. Os seguintes materiais foram usados: açúcar cristal branco (25h) em cada testagem; balança de precisão; vidraria; Glicosímetro; fita medidora de glicose; cronômetro.

EXPLORAÇÃO, MATEMATIZAÇÃO E FORMULAÇÃO DE MODELOS

AÇÚCAR NO SANGUE		
Qtd. Açúcar ingerido (g)	Horário de medição	Qtd. Açúcar no Sangue mg/dL
0	0	90
25	20min	133
25	40min	119
25	60min	143
25	80min	125
25	100min	118



Dispersão dos dados



DISCUSSÃO E SOCIALIZAÇÃO DOS RESULTADOS

O experimento serviu para mostrar o comportamento isolado da subida e queda da glicose no sangue, apenas para os dados coletados, mas o modelo não garante o loop para um tempo maior.

Foi possível notar as variações que o consumo de açúcar causa e como o processo de matematização funciona ao construir um modelo

Fonte: Repositório do LEMM

O teste realizado pelos estudantes, longe de ser um teste experimental com uma amostragem significativa de indivíduos para acompanhamento da glicemia ao longo do tempo, na ingestão de açúcar, apenas se preocupou pontualmente com a variação da glicose de uma pessoa saudável ao ingerir açúcar, somente para tentar compreender matematicamente a ideia de loop infinito utilizado na literatura nutricional. Isto, com relação ao circuito realizado pelo cérebro ao consumir açúcar, considerando os recursos disponíveis

Práticas e estratégias pedagógicas em ambiente colaborativo de modelagem matemática
no LEMM. Desse modo, o cenário criado considerou para realizar as medições o consumo de açúcar em quantidade constante, em um intervalo de tempo também constante, para tentar entender o processo contínuo/infinito do loop em termos matemáticos, objeto do sistema de atividade dos estudantes.

Duas tensões foram significativas ao longo do processo de MM. A primeira diz respeito à definição do objeto de pesquisa e a segunda tensão girou em torno do modelo, pois a função polinomial de grau 5 atendia apenas aos dados isolados, com $R^2 = 1$ (ótimo), no entanto para o entendimento de loop infinito, não seria possível uma repetição contínua, ou seja, o sobe e desce rápido da glicose no sangue para um “tempo infinito”. Desse modo, possibilidades de modelos periódicos poderiam ser testadas. Tais tensões provocaram contradições no sistema de atividade e as mudanças decididas pelo coletivo permitiram a compreensão do resultado.

O ambiente colaborativo proporcionado pela MM nessa atividade, desde a motivação para investigar a temática, a delimitação do objeto, bem como os processos necessários para a coleta de dados e encaminhamentos matemáticos, estão associados às interações concretizadas pelos elementos do sistema, pelos papéis que os sujeitos assumem nesse sistema, pela multivocalidade e historicidade desses estudantes. Isso reflete a compreensão de como esse ambiente é profícuo, pois promove: *percepções diferentes para tentar/solucionar um problema; entender a presença da matemática transitando por todo lugar; articulação entre teoria e prática necessárias à formação, elevando a qualidade das ações acadêmicas; ajudam a conhecer um pouco mais sobre a relação da Matemática com outras áreas do conhecimento e do cotidiano.*

Modelagem Matemática Multitemática

A Modelagem Matemática (MM) assume diferentes concepções, que variam de acordo com o modelador(a) e com as características da situação abordada. Nesta seção apresenta-se a proposta de uma prática de MM a partir da concepção de Santos (2021, p. 38), que enxerga na Modelagem uma capacidade de tornar-se múltipla. O que possibilita que diversas investigações a envolvam como um “‘tear’ (máquina de tecer fios), no sentido de juntar unidades na construção de um todo”.

O processo de elaboração dessa proposta iniciou a partir do seguinte questionamento: como articular saberes dentre as temáticas Pandemia da Covid-19, Educação Financeira e Modelagem Matemática? O processo de escolha dos temas pode surgir de um diálogo com a

turma sobre problemáticas atuais, ou o professor poderá propor, considerando o contexto que deseja promover conhecimento e provocar reflexões.

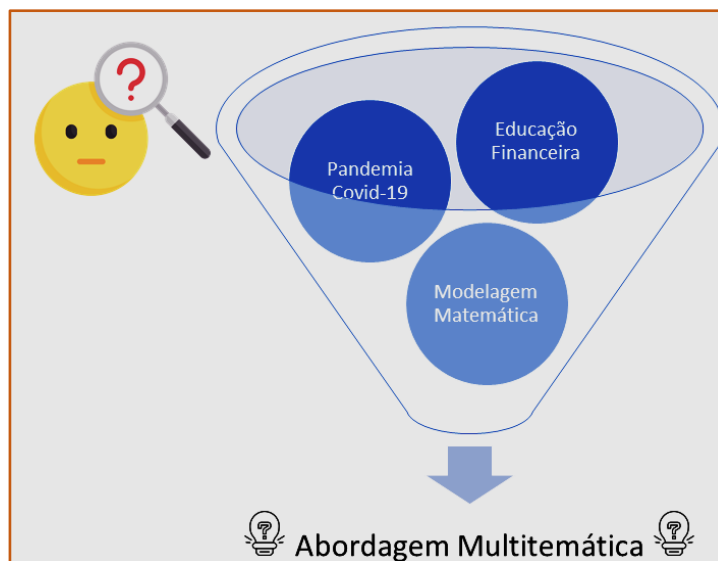


Figura 2: Articulação de Saberes dentre temáticas

A Abordagem Multitemática, Figura 2, trata-se de uma articulação em busca das interconexões dentre diversas temáticas, que se pode começar por um determinado assunto e deixar-se levar suavemente pelas ligações que este gera. Isto, até chegar no ponto de conexão final que se pensou inicialmente, ou seja, para fins de organização das ideias trace um ponto de partida e um de chegada, porém deixe a criatividade livre durante esse trajeto. Este movimento é livre, sem delimitações e diferentes resultados podem ser encontrados a depender das tomadas de decisão do modelador (a) durante o percurso da atividade (SANTOS, 2021).

Estamos vivendo um período atípico devido à pandemia da Covid-19, que causa desequilíbrios nos sistemas de saúde, elevação do nível de problemáticas socioambientais, que culminam em um aumento da instabilidade econômica. Todos esses fatores acirram a desigualdade vivenciada por toda a população, provocando um aumento do número de habitantes que vive em estado de miséria.

Até o momento da escrita desse texto, em consulta rápida no Google utilizando o termo “número de mortes covid Brasil”, as estatísticas mostraram mais de 618 mil, associada a essa tragédia registra-se o aumento de 51% (8.381 km²) do desmatamento na Amazônia (MODELLI, 2021). Por que falar de pandemia e desmatamento? Qual a relação?

Para responder aos questionamentos anteriores e traçar um roteiro com os modeladores indica-se a reportagem de Silveira (2020) intitulada “Por que uma nova pandemia nos próximos anos é praticamente inevitável?” e o vídeo como material complementar disponível no YouTube no canal Pesquisa FAPESP (2020), intitulado “O que o desmatamento tem a ver com as novas pandemias?”.

Em síntese o desmatamento pressiona a fauna das florestas a se aproximar cada vez mais dos ambientes urbanos, e essa aproximação com os seres humanos possibilita que micro-organismos que habitam essas espécies da floresta de forma harmônica, saltem de espécies infectando os humanos. Situação que favorece o surgimento de novas doenças.

Problemáticas ambientais causam problemas na saúde, que também geram grandes impactos na economia. Esta instabilidade econômica reflete-se por diferentes direções: inflação (aumento generalizado dos preços), aumento de desemprego, impacto na produção e consumo de produtos. As situações brevemente explanadas apresentam raízes que podem ser exploradas pelo professor em sala de aula, de diferentes formas e com diversos enfoques.

O Brasil não estava preparado para lidar com uma situação de crise como essa da pandemia da Covid-19. Diante desse fato a situação econômica gerou aumento da miséria da população. Neste ponto da discussão volta-se o olhar para uma necessidade de planejamento financeiro, de organização do orçamento pessoal e familiar, da necessidade de uma reserva de emergência, contudo a Educação Financeira (EF) em nosso país ainda não está em um patamar que todos possam exercer de forma plena sua cidadania financeira.

Há relatórios publicados pelo Banco Central, com dados de 2018 e 2021, acerca da cidadania financeira no país (BACEN, 2021). Cabe destacar que segundo os critérios utilizados para gerar esse índice, o estado do Pará encontra-se na última colocação nos dois levantamentos realizados. Isso mostra o quanto de desafio ainda se tem para caminhar nessa linha de abordagem. Atrelada a essa questão temos a Educação Financeira presente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) como tema transversal, ou seja, deve ser abordada por todas as disciplinas.

Do ponto inicial, pandemia da Covid-19 até se chegar aos impactos da economia, é possível explorar cada assunto de diferentes formas, porém nesta proposta caminha-se em direção à crise econômica, para falar da necessidade de Educação Financeira para a população enfrentar esse período de instabilidade em todos os setores. Até o momento apresentou-se

nesta proposta um momento que pode ser entendido por interação com as temáticas no processo de MM.

Para iniciar o diálogo sobre a EF convide os participantes para assistir ao vídeo “orçamento pessoal e familiar na pandemia”, que mostra que o equilíbrio entre receitas e despesas é essencial para a saúde financeira e saber como fazer e organizar seu planejamento financeiro poderá fazer toda a diferença nesse momento de crise (MEU BOLSO, 2021). Após assistir ao vídeo, inicie com os participantes a elaboração de um orçamento pessoal ou familiar (a escolha vai depender do público que está participando da atividade), organizando receitas e despesas, em uma tabela que pode ser elaborada no caderno ou em uma planilha digital.

Na sequência, após a discussão dos dados do orçamento e a análise se este encontra-se em equilíbrio ou não, convide-os à leitura da reportagem de Maciel (2021), publicada na Agência Brasil com os dados do Serasa, que aponta mais de 62 milhões de brasileiros endividados no mês de maio de 2021. Em seguida assista ao vídeo do Serasa (2021), intitulado “Endividamento: como calcular o seu índice?”, disponível no YouTube, o canal Serasa ensina e neste momento todos (as) podem calcular o seu índice de endividamento, se for possível, ou seja, caso tenham dívida (s).

Dando continuidade à exploração da temática, pergunte aos participantes se sabem o que é inflação. Neste momento, o vídeo “o que é inflação?” do Canal Serasa Ensina no YouTube será utilizado como material auxiliar, para apresentar e discutir o assunto. Questione a todos: de que forma você tem sentido a inflação no seu orçamento? Quais produtos que você deixou de consumir ou substituiu? Conte se a inflação em alta causou alguma mudança no seu planejamento financeiro. Demonstre o impacto desta por meio de uma tabela de produtos que você consome e as variações de preços ocorridas desde o início da pandemia.

Em seguida é importante dialogar sobre um outro assunto importante na EF que se trata da Reserva de Emergência, vídeo de apoio “reserva de emergência”, episódio 14 do canal Meu Bolso em dia, na plataforma do YouTube. Faça os seguintes questionamentos: Você tem ou já fez uma reserva de emergência? Calcule qual o valor da sua reserva de emergência para 6 meses?

Para finalizar a atividade solicite aos participantes que organizem os dados abordados em um texto, ao mesmo tempo que durante a escrita os participantes façam uma análise de

Práticas e estratégias pedagógicas em ambiente colaborativo de modelagem matemática
que reflexões esta prática trouxe para sua vida pessoal/familiar. Outro produto que é gerado nesse percurso é o relatório, que pode ser um espaço para se trabalhar conceitos iniciais da metodologia científica, dando destaque para a estrutura de escrita de um relatório.

Os resultados dessa prática podem ser analisados ou discutidos mediante o suporte da teoria da complexidade que estimula a religação de saberes. Santos, Braga e Espírito Santo (2021) defendem que a articulação de saberes é indispensável nesse novo milênio e que o caráter transdisciplinar, livre e flexível da MM a possibilitam de ser articuladora de temáticas por meio de diversas metodologias e discutidas por diferentes teorias.

Ademais, o resultado dessa articulação temática ou abordagem multitemática é possibilitar aos modeladores que reflitam sobre diferentes aspectos do seu contexto, ao mesmo tempo que eles entendam a importância de superar a fragmentação do conhecimento, pois os danos ao meio ambiente levam a implicações que atingem todos os seres vivos, dado que somos habitantes do mesmo planeta e partilhamos de um destino comum. A MM vai transitando por todos os temas, cada material proposto seja vídeo ou reportagem, torna-se articulador e cria conexões temáticas.

Poderes, Estratégias e Temas Matemáticos

Para Menezes (2021) tarefas de Modelagem Matemática constituem uma atividade formativa profícua para a manifestação de estratégias pedagógicas, poderes e temas matemáticos. Nesse contexto, os poderes naturais, entendidos como processos matemáticos dos alunos, que ao serem promovidos e utilizados na sala de aula, configuram poderes matemáticos. As estratégias pedagógicas são derivadas de constructos pedagógicos, que informam e embasam práticas pedagógicas, quando o professor se vê diante de acontecimentos do seu cotidiano de sala de aula, e os temas matemáticos são entendidos como intrínsecos aos conteúdos matemáticos, por permeá-los revelando conexões ou elos.

Para Mason e Johnston-Wilder (2004) existem vários temas intrínsecos à Matemática, que foram identificados por pensadores diferentes ao longo dos séculos, que são úteis para revelar conexões ou elos entre conteúdos matemáticos que, de outra forma, poderiam passar despercebidos. São eles: liberdade e limitação, fazendo e desfazendo, estendendo e restringindo, invariância e mudança.

Sobre Liberdade e Limitação, Foster et al. (2005) consideram que em Matemática as limitações dos axiomas, leis e propriedades são necessárias para resolver problemas matemáticos. Neste sentido, Johnston-Wilder e Mason (2005) afirmam que os problemas

começam por algum objeto matemático (talvez um número, ou uma forma), indefinido ou arbitrário, no qual se impõe limitações, e de acordo com cada limitação é possível saber se existe liberdade suficiente para que alguns objetos atendam a essa limitação.

Para Mason (2018), os temas fazer e desfazer referem-se à reversão do que é conhecido e do que é procurado. Assim, dado determinado triângulo é possível construir e encontrar as medianas, alturas, bissetrizes, que são consideradas por Johnston-Wilder e Mason (2005) como um fazer, sendo pré-determinadas pelo triângulo dado. Todavia, cada um pode ser transformado em um desfazer, como exemplificam os autores sobre uma reversão do que pode ser solicitado aos alunos. Neste caso, ao invés de pedir para eles construírem as medianas de determinado triângulo, os autores sugerem que dadas as medianas (ou alturas, ou bissetrizes), se construa todos os triângulos possíveis.

Na Geometria encontramos exemplos de casos específicos (restringir), que podem avançar para casos mais gerais (estender). Por exemplo, é possível chamar a atenção dos alunos para a ideia de quadrado, pontuando propriedades do quadrado, como quatro lados congruentes e ângulos retos. Dessa ideia é possível avançar para a ideia de losango, de retângulo, de paralelogramo. Um como sendo caso especial do outro, já que algo é um caso especial de outra coisa, quando todos os teoremas para o mais geral permanecem verdadeiros para a propriedade particular (JOHNSTON-WILDER; MASON, 2005).

Assim, partindo do que articula Menezes (2021) temos que a combinação de interações do professor (estratégias pedagógicas) e dos alunos (poderes matemáticos) no desenvolvimento de uma tarefa de Modelagem Matemática, potencializam temas matemáticos inerentes aos conteúdos matemáticos trabalhados. A seguir apresentamos recortes de estratégias e poderes, que constituíram uma tarefa de Modelagem Matemática resultando em alguns temas matemáticos.

A tarefa Estação de Bombeamento foi desenvolvida de forma presencial e online. De forma presencial aconteceu no formato minicurso no VII Encontro Paraense de Modelagem Matemática (VII EPAM – 2018), e no XII Encontro Nacional de Educação Matemática (XII ENEM – 2019). De forma online fez parte de um conjunto de tarefas, que compuseram um Curso de Extensão realizado em 2018, de forma síncrona no ambiente Virtual Math Teams com GeoGebra (VMTcG). Em ambos os formatos foi usado o GeoGebra, no presencial por meio do

Práticas e estratégias pedagógicas em ambiente colaborativo de modelagem matemática celular dos participantes, e no online o VMTcG disponibiliza o GeoGebra como ferramenta. No Quadro 2, apresentamos a tarefa Estação de Bombeamento.

Quadro 2 – Tarefa Estação de Bombeamento

Tarefa: os proprietários de um oleoduto planejam construir uma estação de bombeamento para transportar óleo para três clientes em três cidades. Na tentativa de minimizar o custo de construção das linhas da estação de bombeamento até os clientes, eles desejam localizar a estação de bombeamento em uma determinada região em que as distâncias das cidades dos clientes até a estação sejam as mesmas. No mapa abaixo estão localizadas as cidades dos três clientes. Se vocês fossem responsáveis pelo projeto de construção dessa estação de bombeamento, como encontrariam a localização ideal dessa região para construí-la? Analisem e proponham uma possibilidade.



Fonte: Curso “Interações e Estratégias de Modelagem no ambiente VMTcG”, 2018

A tarefa foi planejada para que os participantes trabalhassem os conceitos de mediatriz e circuncentro. O objetivo da situação-problema pautava-se na localização de onde poderia ser construída uma estação de bombeamento, a partir da disposição de três cidades em uma determinada região. No entanto, em se tratando da imprevisibilidade do processo de Modelagem Matemática esse objetivo poderia ser alcançado, poderia ser modificado durante o andamento da sessão, ou os participantes poderiam assumir outro objetivo.

Para este artigo trouxemos alguns recortes do desenvolvimento dessa tarefa no ambiente VMTcG, no qual por duas horas o mediador (MENEZES, 2021) e três participantes (Pedro, Paula e Ana) investigaram a situação-problema da Estação de Bombeamento.

Inicialmente os participantes foram apresentados à tarefa, em que os participantes investigaram uma situação artificial, que provocou discussões sobre a construção de uma

estação de bombeamento, considerando a localização de três cidades reais pertencentes a três estados brasileiros da região norte e nordeste.

O trabalho em grupo é uma característica comum de práticas de Modelagem Matemática, e na tarefa Estação de Bombeamento foi observado que os estudantes, juntamente com a mediação do professor, conseguiram a partir de suas interações propor, negociar, argumentar sobre os rumos da investigação.

A passagem do contexto da situação-problema investigada para o contexto matemático no GeoGebra configurou a generalização de informações, resultando em uma primeira solução matemática, que atendia à situação-problema proposta pela tarefa, pois foi encontrado o ponto notável circuncentro, que era equidistante aos vértices do triângulo (cidades-clientes), conforme se observa no Quadro 3.

Quadro 3 – Estimativas dos estudantes

Zeca (20:05:49h): Kraolandia
Zeca (20:05:51h): Meu chute
Ana (20:05:58h): Eu chutaria a Kraolandia
Pedro (20:06:12h): Eu acho que mais ou menos próximo de Guarai
Paula (20:06:35h): Acho que perto das Colinas do Tocantins
Pedro (20:06:41h): Isso, por aí
Pedro (20:07:12h): Acho que é ali entre Colinas do Tocantins e Guarai
Caco (20:07:39h): Eu acho que entre Colinas do Tocantins e Kraolandia

Fonte: Menezes, 2021

Na discussão o mediador chamou a atenção dos estudantes para que observassem aspectos para além do que estava proposto na situação-problema apresentada, já que mesmo encontrando um ponto equidistante às cidades, isso não garantiria economia para os clientes. Por outro lado, o encontro das medianas (baricentro), discutido no desenvolvimento da tarefa não era equidistante às três cidades, porém, apresentava menor custo, se somadas as distâncias do baricentro às cidades consideradas e, desta forma, maior economia para os

Práticas e estratégias pedagógicas em ambiente colaborativo de modelagem matemática
clientes. Além dessas questões, outras envolvendo aspectos geográficos dos estados, questões ambientais foram fomentadas.

Nesse contexto entendemos os pontos notáveis circuncentro e baricentro como modelos matemáticos, pois permitiram aos estudantes responderem à situação-problema investigada por dois caminhos, o circuncentro atendendo à condição de estar a uma mesma distância das três cidades, e isso não sendo indício de economia para os clientes, e o baricentro com distâncias diferentes, mas podendo atender à característica de economizar gastos. Ambos os pontos notáveis construídos refletem capturas dos estudantes das estruturas essenciais da situação-problema investigada.

O mediador, ao usar a estratégia de querer saber a proposta de solução de Pedro, fez Pedro e Paula expressarem e classificarem o que tinham imaginado e organizado em suas mentes. Evidenciando, deste modo, liberdades e limitações dos objetos matemáticos associados a aspectos da situação-problema. Assim, as limitações das localizações das cidades-clientes, associadas a vértices fixados no mapa, repercutiram na liberdade das construções de segmentos de retas, mediatrizes e do circuncentro. Essas limitações também foram observadas nas construções de Ana e Paula, pois Paula construiu as mediatrizes e marcou o circuncentro a partir das construções de circunferência, pontos e triângulo de Ana, de tal modo que as construções de Paula estavam limitadas às construções de Ana. A seguir na Figura 3 a construção de Paula.

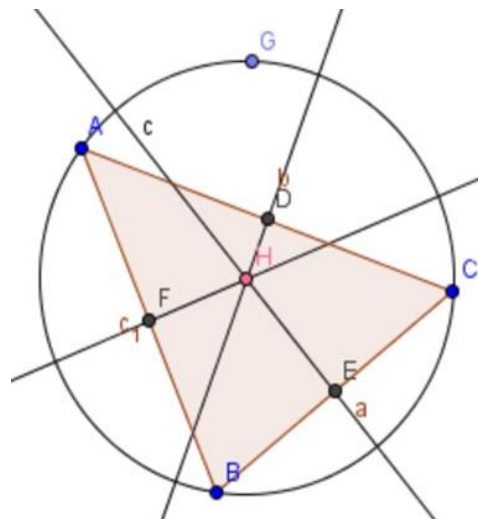


Figura 3 - Construção de Paula
Fonte: Menezes, 2021

As limitações intrínsecas à tarefa evidenciaram o seu potencial em restringir a atenção dos estudantes para os objetos matemáticos, para os quais a tarefa foi elaborada, mediatrizes e circuncentro. O que não impediu os estudantes de expressarem liberdades desses objetos

matemáticos, quando houve a migração dos pontos fixos do mapa para pontos quaisquer no GeoGebra.

Essa mudança de espaço permitiu, por exemplo, que Ana estendesse os conceitos de pontos notáveis de um triângulo, do circuncentro para o baricentro. Permitiu também a Paula ao fazer o circuncentro, limitada às construções de Ana, desfazer essas construções ao movimentar o circuncentro construído, e dessa forma estender os conceitos do específico para o geral, ou seja, das mediatrizes e do circuncentro para uma variedade de triângulos possíveis. Dessa forma, migrar do quadro branco para o GeoGebra oportunizou aos estudantes experimentar liberdades de aspectos da tarefa e dos objetos matemáticos usados.

Os temas matemáticos liberdade e limitação, fazendo e desfazendo, estendendo e restringindo, observados e expressos nas interações do mediador e dos estudantes, explicam muitas das interações identificadas no desenvolvimento da tarefa: uma solução ou duas, circuncentro e o surgimento de diferentes triângulos, o desenho ajudando excluir elementos irrelevantes, para que relações relevantes pudessem ser representadas, limitações e possibilidade de mudança do circuncentro, produzir generalizações, baricentro como possível solução, especificidades das medianas do baricentro, entre outras.

Reconhecemos, partindo das interações identificadas no desenvolvimento da tarefa de Modelagem Matemática, que a manifestação dos poderes matemáticos, estratégias pedagógicas e temas matemáticos aconteceu por causa de aspectos da tarefa Estação de Bombeamento, elaborada e desenvolvida no VMTcG, como:

- as mediatrizes e o circuncentro não foram indicados no comando da situação-problema, muito menos os outros conteúdos que emergiram na sessão, o baricentro e as medianas;
- não foi indicado como os estudantes deveriam conduzir a investigação, pois as discussões foram debatidas, avaliadas, negociadas, aceitas, recusadas pelo grupo;
- houve possibilidade de desenvolver diferentes estratégias de resolução, como observado na ausência de Ana, que permitiu discutir o ponto notável derivado dos encontros das medianas de um triângulo inscrito em uma circunferência qualquer;

- houve opções de estratégias, resolução e solução;
- o controle das interações comunicativas não esteve centrado no mediador, oportunizando aos estudantes apresentarem e defenderem seus posicionamentos, bem como contestarem argumentos do mediador, caracterizando dessa forma, uma comunicação dialógica entre mediador e estudantes.

Essa combinação repercutiu nas interações dos estudantes fazendo-os usar seus poderes matemáticos, que em consonância com as estratégias pedagógicas do mediador, expressaram os temas matemáticos intrínsecos à tarefa Estação de Bombeamento. Isto porque estavam em potência e foram desenvolvidos em meio a essa combinação de poderes matemáticos e estratégias pedagógicas nos espaços do VMTcG, revelando uma dependência entre as interações dos estudantes, do mediador e dos conteúdos matemáticos.

Considerações

Neste texto abordamos algumas práticas de atividades de MM fundamentadas nas concepções: contexto de trabalho colaborativo e interações; abordagem multitemática e articulação de saberes; poderes, estratégias e temas matemáticos. É condição *sine qua non* perceber a MM como heterogênea e na diversidade da região amazônica é possível fazer Modelagem em múltiplos cenários e vários níveis de ensino, uma vez que, atividades de MM poderão ser desenvolvidas em diferentes configurações práticas e teóricas.

Desse modo, podemos assumir a MM como atividade colaborativa de um sistema (sujeitos, objeto, artefatos mediadores, regras, divisão do trabalho e comunidade) que estabelece entre seus integrantes interações que culminam em transformações expansivas. Além disso os diferentes aspectos e contextos transitam por todo e qualquer tema que dialogue com as questões de mundo, de meio ambiente e, portanto, são possíveis de investigação em MM dentro de uma abordagem Multitemática e de articulação de saberes.

Quando se trata de poderes matemáticos e estratégias pedagógicas, a combinação de interações desses e entre os estudantes, potencializa a exploração de temas matemáticos. E em todas essas associações teórico-práticas, o trabalho colaborativo é evidenciado, pois o diálogo entre pares é fundamental na tomada de decisão quando se faz MM, mais ainda quando se discute temas relevantes da sociedade, múltipla de um todo.

Referências

BACEN. Banco Central do Brasil. **Relatórios sobre Cidadania e Inclusão Financeira**. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/cidadaniafinanceira>. Acesso em 15 dez. 2021.

BRAGA, Roberta Modesto. **Aprendizagem em modelagem matemática pelas interações dos elementos de um sistema de atividade na perspectiva da teoria da atividade de Engeström**. 2015. 133 f. Tese de Doutorado (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas). Universidade Federal do Pará, Belém/PA.2015.

Canal Pesquisa FAPESP. **O que o desmatamento tem a ver com as novas pandemias?** 2020. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=nodoQt9DsHI&t=52s>. Acesso em 15 dez. 2021.

ENGESTRÖM, Yrjö. **Learning by expanding: an activity-theoretical approach to developmental research**. Helsinki, Orienta-Konsultit, 1987

FOSTER C., GALLIGAN L., MACKRELL K., MASON J., MELVILLE A., PIGGOTT J., RODD M., WATSON A. **Freedom and Constraint**. Mathematics Teaching, 191, June, 2005. p. 37-40.

JOHNSTON-WILDER, S.; MASON, J. **Developing Thinking In Geometry**. USA: SAGE, 2005.

MACIEL, C. **Mapa da inadimplência aponta mais de 62 milhões de endividados**. Disponível em: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/economia/noticia/2021-07/mapa-da-inadimplencia-aponta-mais-de-62-milhoes-de-endividados>. Acesso em 15 dez. 2021.

MASON, J. Combining Geometrical Transformations: a meta-mathematical narrative. In: ZAZKIS R.; HERBST P (Eds). **Scripting approaches in mathematics education: Mathematical dialogues in research and practice**. Switzerland: Springer International, 2018. p. 21-52.

MASON, J., & JOHNSTON-WILDER, S. **Designing and using mathematical tasks**. Milton Keynes, England: Open University Press, 2004.

MEYER, J. F. da C. A; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. dos S. **Modelagem em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

MENEZES, R. O. **Modelagem Matemática Online: temas matemáticos, poderes naturais e estratégias pedagógicas**. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas), Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Belém, 2021, 185 f.

MEU BOLSO em dia. **EP#14 Reserva de emergência**. 2021. YouTube Canal Meu Bolso em dia. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Hxlllk8eNFE>. Acesso em 15 dez. 2021.

MEU BOLSO em dia. **EP#11 Orçamento pessoal e familiar na pandemia**. 2021. YouTube Canal Meu Bolso em dia. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=C83n1aRe2Hc>. Acesso em 15 dez. 2021.

Práticas e estratégias pedagógicas em ambiente colaborativo de modelagem matemática

MODELLI, L. **Desmatamento na Amazônia cresce 51% nos últimos 11 meses em relação ao período anterior, aponta Imazon.** Disponível em: <https://g1.globo.com/natureza/amazonia/noticia/2021/07/19/desmatamento-na-amazonia-cresce-51percent-nos-ultimos-11-meses-em-relacao-ao-periodo-anterior-aponta-imazon.ghtml>. Acesso em 15 dez. 2021.

SANTOS, N. T. **Modelagem Matemática e Teoria da Complexidade: Diálogo Multitemático no Ensino Superior.** Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas) - Universidade Federal do Pará. Belém-Pará. 2021, 139f.

SANTOS, N.; BRAGA, R.; ESPÍRITO SANTO, A. Entrelaçamento entre modelagem Matemática e a teoria da complexidade de Edgar Morin. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 3, p. 1-16, 6 jun. 2021.

SERASA ensina. **Endividamento: como calcular o seu índice?** 2021. YouTube Canal Serasa Ensina. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=54xKBw2MwEE>. Acesso em 15 dez. 2021.

SERASA ensina. **O que é inflação?** 2020. YouTube Canal Serasa Ensina. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=omFE3y4m4o>. Acesso em 15 dez. 2021.

SILVEIRA, E. **Por que uma nova pandemia nos próximos anos é praticamente inevitável?** BBC News Brasil. 2020. Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/geral-53758807>. Acesso em 20 de nov. 2021.

Sobre os autores

Roberta Modesto Braga

Graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade do Estado do Pará (2003), Mestrado pelo Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (2009) e Doutorado pelo mesmo Programa (2015). Experiência na área de Educação Matemática, com ênfase em Modelagem Matemática e Tecnologias. Líder do Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelagem na Educação Matemática – GEMM (<http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/684553>) e Coordenadora do Laboratório Experimental de Modelagem Matemática - LEMM. Professora Adjunta IV da Faculdade de Matemática, Campus Castanhal da Universidade Federal do Pará. E-mail: robertabraga@ufpa.br. Orcid: <http://orcid.org/0000-0003-3747-5862>

Neuma Teixeira dos Santos

Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Pará (2008). Doutora em Educação em Ciências e Matemáticas na área de Educação Matemática. Mestre em Engenharia Elétrica. Especialista em Educação Ambiental e Sustentabilidade. É professora Adjunta II da Universidade Federal Rural da Amazônia no Campus de Capanema, coordena o Grupo de Ensino, Pesquisa e Extensão do Laboratório de Geotecnologias, Educação Financeira e Ambiental (LabGEFA), Membro do Grupo de Pesquisa de Modelagem Matemática (GEMM-UFGA). E-mail: neuma.santos@ufpa.edu.br. Orcid: <https://orcid.org/0000-0003-3026-4296>

Rhômulo Oliveira Menezes

Graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade do Estado do Pará (UEPA), Mestre em Educação em Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Pará (UFPA, Bolsa CNPq). Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará (PPGECM/IEMCI/UFPA, Bolsa CAPES entre 2017-2018), com período sanduíche em 2018 no Programa de Pós-Graduação em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (PPGEduc/IE/UFRRJ). Membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelagem Matemática - GEMM. Professor da Secretaria de Educação do Estado do Pará (SEDUC/PA). Temas de pesquisa: Modelagem Matemática; Tecnologias Digitais voltadas para o Ensino de Matemática.

E-mail: rhomulo.menezes4542@escola.seduc.pa.gov.br.

Orcid: <https://orcid.org/0000-0001-9042-8323>

Recebido em: 12/05/2022

Aceito para publicação em: 03/06/2022