

Investigação matemática: um caminho para o ensino da matemática

Mathematical Research a Pathway to Teaching Mathematics

Rosineide de Sousa Jucá
Universidade do Estado do Pará (UEPA)
Belém - Pará- Brasil

Márcio Pironel
Instituto Federal de São Paulo (IFSP)
Salto- São Paulo -Brasil

Resumo

A investigação matemática como proposta metodológica de ensino pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem, pois pode fornecer ao professor elementos para desenvolver o espírito investigativo e criativos dos alunos, e a estes o prazer em aprender matemática de forma diferenciada. Muitos estudos têm sido desenvolvidos nos últimos anos sobre a investigação matemática em sala de aula. Assim, o propósito desse trabalho é discorrer sobre a investigação matemática e as contribuições da investigação matemática para o processo de ensino e aprendizagem em matemática. O caminho metodológico escolhido foi a pesquisa bibliográfica, na qual realizamos o levantamento de estudos que discorrem sobre o ensino de matemática por meio da investigação matemática. Tais estudos mostram as vantagens da investigação matemática e sua contribuição para o desenvolvimento matemático dos alunos, assim como o papel do aluno e do professor em uma aula de investigação matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino de Matemática; Investigação Matemática.

Abstract

Mathematical investigation as a methodological teaching proposal can contribute to the teaching and learning process, as it can provide the teacher with elements to develop the students' investigative and creative spirit, and for them the pleasure of learning mathematics in a different way. Many studies have been carried out in recent years on mathematical research in the classroom. Thus, the purpose of this work is to discuss mathematical research and the contributions of mathematical research to the teaching and learning process in mathematics. The methodological path chosen was the bibliographical research, in which we carried out a survey of studies that discuss the teaching of mathematics through mathematical investigation. Such studies show the advantages of mathematical investigation and its contribution to the mathematical development of students, as well as the role of the student and teacher in a mathematical investigation class. **Keywords:** Mathematics Education; Teaching of Mathematics; Mathematical Research.

Keywords: Mathematics Education; Teaching of Mathematics; Mathematical Research.

Introdução

O matemático na produção do conhecimento envereda por caminhos desconhecidos para produzir matemática. É a partir de uma ideia que o inquieta, de um problema a resolver, que o matemático se lança em uma investigação para descobrir algo, comprovar ou refutar uma ideia. Segundo Ponte (2003b), para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou entre estes e novos objetos matemáticos, procurando identificar e comprovar as respectivas propriedades.

Segundo Borasi (1987), na investigação e na construção do conhecimento matemático aconteceram muitos erros que levaram a descoberta de novos conhecimentos, ela cita a criação do matemático italiano Giovanni Gerolamo Saccheri (1667-1733) de uma geometria não euclidiana, gerada por uma tentativa malsucedida de "provar" o postulado de retas paralelas. Saccheri (2014), queria provar a impossibilidade da existência de outras geometrias e acabou sendo considerado, com o passar dos séculos, o pai das geometrias não-euclidianas. Foi por meio da inquietação e da investigação matemática realizada por esse matemático que uma nova geometria foi descoberta.

Outra história de uma investigação matemática que levou à produção de um novo conhecimento é colocada por Pontes, Brocado e Oliveira (2005) ao falar que Henri Poincaré, um dos grandes matemáticos do século XX, ao tentar demonstrar a impossibilidade da existência de funções com certas características, acabou por provar exatamente o contrário, e concluiu que essas funções existem e as chamou de funções fuchsianas. Para Ponte (2003b, p.4):

Essa investigação desenrolou-se em três fases bem distintas: uma primeira fase de compilação de informação e experimentação, sem produzir resultados palpáveis, seguida de uma fase de iluminação súbita e, finalmente, de uma terceira fase de sistematização e verificação dos resultados.

O relato dessas histórias mostra que a investigação é algo fundamental na construção do conhecimento matemático, e que é essencial no trabalho do matemático. E que para que uma investigação ocorra é necessário que exista um problema que cause inquietação. Por isso se considera a existência de uma relação estreita entre problema e investigação.

Neste contexto, as investigações matemáticas são uma opção para repensar o processo de ensino e aprendizagem e promover aulas mais interessantes para os alunos da Educação Básica. Envolver os alunos em atividades de investigação matemática possibilita que além de aprenderem matemática, possam sentir o prazer da descoberta. Pois como coloca Brumann (2002), aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática.

Autores como Ponte (2003), Jesus e Serrazina (2005), Ponte, Brocardo e Oliveira (2005), Ernest (1991), discutem sobre a investigação matemática e suas contribuições no desenvolvimento matemático dos alunos em diferentes etapas de ensino. Assim, o propósito desse trabalho é discorrer sobre a investigação matemática e sua contribuição para o processo de ensino e aprendizagem em matemática.

As Tendências de Ensino de Matemática no Brasil

O ensino da matemática ao longo do tempo tem passado por modificações referentes à sua finalidade com o intuito de acompanhar as transformações da sociedade. No entanto, as formas de ensinar sofrem influência das concepções que os professores possuem de matemática, de ensino e de aprendizagem. Para Fioretini (1998) o modo de ensinar sofre influência também dos valores e das finalidades que o professor atribui ao ensino da matemática, da forma como concebe a relação professor-aluno e, além disso, da visão que tem de mundo, de sociedade e de homem. A forma como o professor concebe a Matemática tem fortes implicações no modo como entende e pratica o ensino da Matemática e vice-versa.

O professor que concebe a Matemática como uma ciência exata, logicamente organizada e a-histórica ou pronta e acabada, certamente terá uma prática pedagógica diferente daquele que a concebe como uma ciência viva, dinâmica e historicamente sendo construída pelos homens, atendendo a determinados interesses e necessidades sociais. (FIORENTINI, 1995, p.5)

Essas formas de conceber o ensino de matemática têm origem em duas correntes filosóficas da matemática, a fundamentalista e as correntes que surgiram após a crise fundamentalista. A primeira, a corrente absolutista representada pelo intuicionismo, logicismo e formalismo, defende que o saber matemático é constituído respectivamente de aspectos intuitivos, lógicos e axiomáticos. A corrente falibilista, defende o saber matemático reconhecendo em sua constituição a falibilidade, os aspectos intuitivos, experimentais,

temporais, históricos, culturais e os advindos com as revoluções científicas. (MENEGETI, 2010)

Para Ernest (1991), as correntes absolutistas encaram o conhecimento matemático como um edifício solidamente alicerçado, construído dedutiva e cumulativamente, qual paradigma do rigor absoluto, essas correntes contribuíram para a cristalização de um currículo fortemente estruturado em torno dos conteúdos. Como consequência, considerava-se que o papel do professor era a simples exposição clara e rigorosa dos conceitos matemáticos e o treino dos alunos na resolução de exercícios repetitivos. Esta forma de apresentar a matemática impõe aos alunos uma visão muito limitada e imperfeita da sua natureza.

Sobre outra vertente filosófica, o conhecimento matemático se apresenta como uma construção humana, histórica, falível, cultural e social. Nessa perspectiva a “Matemática caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área de saber é fruto da construção humana e da sua interação constante com o contexto natural, social e cultural” (BRASIL, 1998, p.24).

Wilder (1998, p. 6), ao discutir sobre a sociologia da matemática, coloca que “pelo reconhecimento da base cultural da matemática se poderá compreender melhor a sua natureza.” Para este autor, é na compreensão da sociologia da matemática que será possível iluminar os problemas da constituição do saber matemático, particularmente os relacionados com os fundamentos da matemática. É pelo reconhecimento da base cultural da matemática que se constata o seu caráter crescente e variável.

As concepções da constituição do saber matemático, influenciaram e continuam a influenciar os professores e suas formas de ensinar. Visto que em cada década temos características distintas dos modelos de ensinar matemática, do papel do professor e do aluno. Fiorentini (1995) discorre sobre as tendências pedagógicas do ensino de matemática ao longo do tempo e que sofreram influência das correntes filosóficas absolutistas e falibilistas da matemática.

Segundo Fiorentini (1995) até final dos anos 50, o ensino de matemática caracterizava-se pela ênfase as ideias e formas da Matemática clássica, seguindo sobretudo o modelo

euclidianos e à concepção platônica, com forte influência da visão absolutista da Matemática. Esse modelo de ensino de matemática tinha por finalidade o desenvolvimento do espírito, da "disciplina mental" e do pensamento lógico-dedutivo, com o seu caráter pragmático de ferramenta para a resolução de problemas.

O ensino nessa tendência pedagógica foi acentuadamente livresco e centrado no professor e no seu papel de transmissor e expositor do conteúdo através de preleções ou de desenvolvimentos teóricos na lousa. A aprendizagem do aluno era considerada passiva e consistia na memorização e na reprodução e repetição precisa dos raciocínios e procedimentos ditados pelo professor ou pelos livros. (FIORENTINI, 1995, p.7)

Nos anos 60 e 70, com o Movimento da Matemática Moderna, surge a tendência pedagógica formalista moderna, que tinha por objetivo modernizar o ensino da Matemática, com a inserção de novos conteúdos ao currículo de matemática e capacitar o aluno para aplicar as formas estruturais de pensamento inteligente aos mais variados domínios, dentro e fora da Matemática. Assim, o ensino proposto fundamentava-se em grandes estruturas que organizavam o conhecimento matemático contemporâneo e enfatizava a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas, a topologia etc. (BRASIL, 1998).

Apesar das inovações curriculares trazidas pelo Movimento da Matemática Moderna não houve grandes modificações na forma de ensinar. O ensino, de um modo geral, continuou sendo acentuadamente autoritário e centrado no professor que era o expositor de conteúdos por meio de demonstrações rigorosas no quadro. “O aluno, salvo algumas poucas experiências alternativas, continuava sendo considerado passivo, tendo de reproduzir a linguagem e os raciocínios lógicos e estruturais ditados pelo professor”. (FIORENTINI, 1995, p.7)

Outra tendência de ensino que se desenvolveu no Brasil, a partir da década de 20 e que se fez presente nos anos 60 até 80, foi a empírico-ativista. Ela emerge no seio do movimento escolanovista, estando também associado ao pragmatismo norte-americano de John Dewey. Essa tendência tinha como base a experimentação como um caminho para a aprendizagem. A tendência empírico-ativista, procurava valorizar os processos de aprendizagem e envolver o aluno em atividades. “Tinha como pressuposto básico que o aluno aprende fazendo. Por isso, didaticamente, irá valorizar, no processo de ensino, a pesquisa, a descoberta, os estudos

do meio, a resolução de problemas e as atividades experimentais.” (FIORENTINI, 1995, p.11), o professor atuava como um mediador do processo de ensino.

Nos anos 60 a 80, tivemos outra tendência no ensino da Matemática, a tecnicista com suas variações. A tecnicista formalista, seguindo as orientações do movimento da Matemática Moderna; e a tecnicista mecanicista, que procurou reduzir a Matemática a um conjunto de técnicas, regras e algoritmos, sem grande preocupação em fundamentá-los ou justificá-los. No entanto, uma ou outra tinham como finalidade pedagógica para o ensino da Matemática “desenvolver habilidades e atitudes computacionais e manipulativas, capacitando o aluno para a resolução de exercícios ou de problemas-padrão.” (FIORENTINI, 1995, P. 17)

A partir de 1980, o ensino de matemática passaria por novas modificações trazidas pelo documento National Council of Teachers of Mathematics - NCTM, dos Estados Unidos, que apresentou recomendações para o ensino de Matemática no documento “*An Agenda for Acton*” (Uma agenda para Ação). Nele, a resolução de problemas era destacada como o foco do ensino da Matemática. A compreensão da relevância de aspectos sociais, antropológicos, linguísticos, além dos cognitivos, na aprendizagem da Matemática, imprimiu novos rumos às discussões curriculares. Essas ideias influenciaram as reformas que ocorreram em todo o mundo, a partir de então. As propostas elaboradas no período 1980/1995, em diferentes países, apresentaram pontos de convergência (BRASIL,1998).

Na década de 90, no Brasil, apoiados nas ideias dos Standards do NCTM, surgiram os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, que apontavam o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, explorá-los, generalizá-los e até propor novos problemas a partir deles. Assim, o ensino de matemática ganha novas orientações pedagógicas apresentando novas tendências para o ensino tais como: a resolução de problemas, a modelagem matemática, a história da matemática, as tecnologias da informação e comunicação, os jogos, a investigação matemática, entre outras.

Em 2017, no Brasil, é homologada a Base Nacional Comum Curricular – BNCC, um documento normativo e orientador curricular que traz como foco do ensino o desenvolvimento de competências e de habilidades. Esse documento foi, a exemplo dos Parâmetros Curriculares Nacionais, inspirado em publicações estadunidenses como o Common Core State Standards (NGA; CCSSO, 2010) e o documento Principles to Action:

Ensuring Mathematical Success for All (NCTM, 2014), que procura adequar as práticas apresentadas pelo documento Principles and Standards for Mathematical School (NCTM, 2000) ao contexto gerado pelo “Common Core”. Em relação à importância do ensino da matemática, encontramos na BNCC que:

O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais. (BRASIL, 2017, P. 267)

Nas orientações para o ensino da matemática, a BNCC coloca que este ensino deve promover o desenvolvimento do letramento matemático, definido como “as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos” (BRASIL, 2017, P. 268). Sobre os processos metodológicos, a BNCC faz referências as tendências de ensino, destacando a resolução de problemas e a investigação matemática.

Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional. (BRASIL, 2017, P. 267)

Ao se falar em letramento matemático como a competência de raciocinar, representar, levantar conjecturas, comunicar e argumentar podemos pensar no processo de investigação matemática como um dos caminhos metodológicos que possibilitaria desenvolver o letramento matemático dos alunos.

A Investigação Matemática na sala de aula

A importância da investigação matemática é incontestável e a história da matemática está cheia de exemplos de exploração, investigações e de resolução de problemas que levaram a construção do conhecimento matemático. Nesse sentido, as investigações matemáticas em sala de aula podem proporcionar aos alunos que experimentem um pouco do trabalho realizado pelo matemático, essa proximidade é corroborada por Ernest (1991), Ponte et al (1998a, 1998b), Fonseca, Brunheira e Ponte (1999), Ponte (2003a, 2003b), Jesus e

Serrazina (2005), Braumann (2002) e Ponte, Brocado e Oliveira (2005) que discorrem sobre a investigação e sua contribuição para o desenvolvimento matemático dos alunos

Para Ernest (1991, p.283), “a atividade matemática de todos os alunos de Matemática, desde que produtiva, envolvendo a formulação e a resolução de problemas, não é qualitativamente diferente da atividade do matemático profissional”. A esse respeito, Jesus e Serrazina (2005) colocam que se a intenção é que os alunos vejam a Matemática como conhecimento em permanente construção, é fundamental que eles experimentem, desde o início da escolaridade, momentos parecidos ao trabalho dos matemáticos. Para as autoras, essa aproximação com o trabalho dos matemáticos possibilitaria aos alunos uma aprendizagem com maior compreensão da matemática e de sua relevância para a sociedade, além do que aumentaria a confiança nas suas aptidões, para pensar e se comunicar matematicamente, e tomar decisões adequadas na escolha de estratégias.

Na colocação de Fonseca, Brunheira e Ponte (1999) é indiscutível o interesse dos problemas para os matemáticos, então é necessário compreender também qual o seu alcance educativo. Ou seja, será possível estabelecer um paralelo entre a atividade do matemático e a atividade do aluno na aula de Matemática? Provavelmente não, os conhecimentos, os processos matemáticos, a experiência, o tempo e dedicação que os matemáticos dispõem para resolver um problema não são os mesmos que os alunos possuem, mas segundo os autores, a atividade de resolução de problemas de ambos pode ser equivalente quanto à sua natureza.

De igual forma, Ponte et al (1998a) salientam que a aprendizagem em Matemática deve contemplar oportunidades de os alunos se envolverem em momentos genuínos de atividade matemática. Num movimento que tem igualmente o seu paralelo no ensino experimental das ciências, passa-se a dar atenção aos processos de criação do saber e não simplesmente ao seu produto.

Aprender matemática de forma passiva sem experimentar a sua construção, sem compreender seu sentido e sua função no mundo, por meio de memorização e repetição de conteúdos vazios de significados é pouco atraente para os alunos, pois não produz significado para eles. Essa postura é corroborada pelo NCTM (2014) que sugere que os alunos sejam

envolvidos em tarefas desafiadoras, no discurso matemático e na resolução de problemas de investigação.

Na colocação de Braumann (2002, p.5)

Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar fazendo erros e aprendendo com eles.”

Esse “pensar matematicamente”, como os matemáticos, pode ser desenvolvida por meio da resolução de problemas e de investigações matemáticas realizadas pelos alunos em sala de aula, no qual se valorizaria os processos descritos na BNCC, como: formular, testar e provar conjecturas, argumentar e usar procedimentos de natureza metacognitiva. Nessa direção, Ponte et al (1998), compreendem que as “Atividades investigativas” ou “investigações matemáticas” se designam como um tipo de atividade que dá ênfase a processos matemáticos tais como procurar regularidades, formular, testar, justificar e provar conjecturas, refletir e generalizar.

Para Ponte, Brocado e Oliveira (2005) as investigações matemáticas trazem para a sala de aula o espírito de atividade matemática genuína, uma vez que os alunos são chamados a agir como matemáticos, não somente ao formular questões e conjecturas e realizar provas e refutações, como também na apresentação dos resultados e nas discussões e argumentações com seus pares.

É nesse processo de investigação que os alunos poderão compreender de fato a matemática que aprendem e seu papel social. Segundo Braumann (2002, p.5), somente pela investigação matemática é que se pode verdadeiramente perceber o que é “a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão detetivesca indispensável à verdadeira função da Matemática.” Logo, a aprendizagem da Matemática deve possibilitar oportunidades de os alunos se envolverem em momentos genuínos de atividade matemática.

As atividades matemáticas devem proporcionar aos alunos o compreender para aprender matemática. Sem essa compreensão não existe aprendizagem. Memorizar conteúdos que foram exaustivamente trabalhados por meio de exercícios não significa que

houve uma aprendizagem de fato. E isso fica evidente quando os alunos não conseguem transferir o que foi trabalhado em exercícios para outras situações, como para problemas em diferentes contextos. As atividades propostas aos alunos devem proporcionar uma aprendizagem com compreensão e significado.

Ponte (2005) aponta que o desenvolvimento de uma atividade matemática rica e produtiva por parte dos alunos pode basear-se em tarefas de natureza diversificada, como exercícios, problemas, investigações e explorações. O autor faz referência as diferentes tarefas de Matemática e as suas características. Na Figura 1 o autor mostra as diferenças entre esses três tipos de tarefas.

Figura 1: diferenças de tarefas

Exercício	Problema	Tarefa de investigação
Simplifica:		
a) $\frac{6}{12} =$	Qual o mais pequeno número inteiro que, dividido por 5, 6 e 7 dá sempre resto 3?	1. Escreve a tabuada dos 9, desde 1 até 12. Observa os algarismos das diversas colunas. Encontra alguma regularidade.
b) $\frac{3 \times (10 - 7)}{17 - 2} =$		
c) $\frac{\frac{20}{18 - 9}}{\frac{(15 - 10) \times 2}{3}} =$		
		2. Vê se encontra regularidades nas tabuadas de outros números.

Fonte: Pontes (2003, p. 4)

Para Ponte (2003a) uma tarefa tem quatro dimensões básicas: o seu grau de dificuldade, a sua estrutura, o seu contexto referencial e o tempo requerido para a sua resolução. O autor coloca que os exercícios são tarefas sem grande dificuldade e estrutura fechada; os problemas são tarefas também fechadas, mas com elevada dificuldade; as investigações têm um grau de dificuldade elevado, mas uma estrutura aberta; e finalmente, as tarefas de exploração são fáceis e com estrutura aberta.

As tarefas estruturadas podem ser exercícios de desafio reduzido que visam sobretudo a consolidação de conhecimentos, ou problemas de desafio elevado que visam a aplicação criativa dos conhecimentos que o aluno já possui. Pelo seu lado, as tarefas abertas podem ser explorações de desafio reduzido que visam sobretudo a construção de novos conceitos, ou investigações de desafio elevado que visam tanto

o desenvolvimento de novos conceitos como o uso criativo de conceitos já conhecidos. (PONTE, 2003a, p.7)

É importante que para um bom desempenho dos alunos nas tarefas, o professor conheça os diferentes tipos de tarefas e as selecione de acordo com os objetivos definidos para cada aula, levando em consideração as dificuldades e o nível de desenvolvimento dos seus alunos. Para Ponte (2003a), é comum não se diferenciar tarefas de investigação e de exploração, chamando a ambas de “investigações”. E provavelmente isso ocorra porque é difícil inicialmente saber qual o grau de dificuldade que uma tarefa aberta terá para um certo grupo de alunos. E pelo grau de dificuldade das tarefas abertas que se pode classificá-las como sendo de exploração ou de investigação.

Na figura 2, temos o modelo de uma tarefa de exploração, que segundo Ponte (2003a) é um tipo de tarefa estruturada de modo variável, na qual as duas primeiras questões são relativamente estruturadas e as duas últimas são bastante abertas.

Figura 2 Tarefa de exploração

1. Repara que $2^2 = 4$ e que $2 \times 2 = 4$.

- Será sempre verdade que $a^n = a \times n$?
- Experimenta nos seguintes casos e noutros por ti escolhidos, usando, se necessário, a calculadora.

$$\begin{array}{cccc}
 0^2 = & 0 \times 2 = & 10^2 = & 10 \times 2 = \\
 4^2 = & 4 \times 2 = & \left(\frac{1}{2}\right)^3 = & \left(\frac{1}{2}\right) \times 3 = \\
 3^3 = & 3 \times 3 = & \left(\frac{5}{3}\right)^4 = & \left(\frac{5}{4}\right) \times 4 =
 \end{array}$$

Fonte: Ponte (2003a, p.7)

Em contrapartida, as tarefas de investigação matemática exigem dos alunos a geração e a organização de dados, somente depois é que questões serão formuladas. Por vezes, as conjecturas surgem na sequência da manipulação dos dados. (PONTE, BROCADO E OLIVEIRA, 2005).

Ponte (2003a) apresenta uma tarefa de investigação formulada com base em questões da realidade dos alunos e que pode servir como ponto de partida, não só para o

desenvolvimento de competências de investigação, mas também para a aprendizagem de novos conceitos matemáticos.

Figura 3 Tarefa de investigação

Supõe que queres comunicar, a um aluno de um país distante, ou mesmo, quem sabe, a um extraterrestre, como são os alunos da tua turma.

1ª etapa: Preparação das questões de investigação

Discute, com os teus colegas, sobre:

1. Que dados (físicos, sociais, culturais...) devem entrar na caracterização do aluno típico?
2. Como pensas que vai ser o perfil do aluno típico da tua turma?
3. Será necessário traçar um perfil para os rapazes e outro para as raparigas? Porquê?

Fonte: Ponte (2003a, p.9)

Outro ponto a destacar é a comparação ou a confusão entre a investigação matemática e a resolução de problema. Para Pontes et Al (1998a) ambos os termos são usados, muitas vezes, de modo indistinto. Ambas as noções se referem a processos matemáticos complexos e ambas envolvem atividade fortemente problemática, no entanto seus processos e objetivos são diferentes.

O aspecto mais distintivo das actividades de investigação em relação à resolução de problemas diz respeito à natureza da questão a estudar. Enquanto na resolução de problemas a questão tende a ser apresentada já completamente especificada ao aluno, na actividade de investigação as questões iniciais são de um modo geral vagas, necessitando de ser trabalhadas, tornadas mais precisas e transformadas em questões concretas pelo próprio aluno. (PONTE ET AL, 1998a, p.12)

Para Ernest (1991) a investigação matemática é a exploração de uma terra desconhecida, embora as investigações possam começar com uma situação ou questionamento matemático, o foco da atividade muda à medida que novas questões são colocadas e que novas situações são geradas e exploradas. Assim, o objeto da investigação muda e é redefinido pelo investigador. Na resolução de problema existe uma situação para a qual não há um algoritmo acessível que determine o método de solução.

Em concordância Fonseca, Brunheira e Ponte (1999) colocam que na resolução de problemas, o processo é convergente, pois o objetivo é encontrar um caminho para atingir

um ponto não imediatamente acessível. Na investigação matemática, temos um processo divergente, pois o objetivo é explorar todos os caminhos que surgirem como interessantes a partir de uma dada situação. Sabe-se qual é o ponto de partida, mas não se sabe qual será o ponto de chegada.

Ponte et Al (1998a) diferenciam que enquanto na resolução de problemas o objetivo é a estratégia seguida e a solução, na atividade de investigação o objetivo é a compreensão de um domínio problemático. Os autores ressaltam que:

Numa investigação parte-se de uma situação que é preciso compreender ou de um conjunto de dados que é preciso organizar e interpretar. A partir daí formulam-se questões, para as quais se procura fazer conjecturas. O teste destas conjecturas e a recolha de mais dados pode levar à formulação de novas conjecturas ou à confirmação das conjecturas iniciais. Neste processo podem surgir também novas questões a investigar. (PONTE ET AL,1998a, p.13)

Apesar de todos os benefícios que as atividades de investigação matemática podem oferecer para a aprendizagem dos alunos, Ponte, Brocado e Oliveira (2005) destacam que o sucesso de uma atividade de investigação em sala de aula depende de como o professor vai conduzir a atividade, pois as aulas de investigação podem ser planejadas, mas nunca se sabe como vão ser finalizadas. Visto que a variedade de percursos que os alunos seguem, seus avanços e recuos, as divergências que surgem, e a forma como a turma reage as intervenções do professor são momentos imprevisíveis em uma aula de investigação.

Ponte, Brocado e Oliveira (2005, p.25) descrevem as três fases de uma atividade de investigação matemática:

- 1) Introdução da tarefa: momento no qual o professor faz a proposta á turma oralmente ou por escrito;
- 2) Realização da investigação, que pode ser individualmente, em pares, em grupos com toda a turma;
- 3) Discussão dos resultados: momento em que os alunos relatam aos colegas e ao professor o trabalho realizado.

Em cada fase descrita, existem momentos específicos descritos por Ponte et al (1998b):

- ✓ O primeiro momento envolve o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões.
- ✓ O segundo refere-se ao processo de formulação de conjecturas.
- ✓ O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas.
- ✓ o quarto e último momento, diz respeito à argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado.

Segundo Ponte (2003b), em cada momento pode-se incluir atividades como se indica na figura 4. Estes momentos não acontecem de forma ordenada, pelo contrário, pode ocorrer que a conjectura inicial apareça simultaneamente com a formulação das questões, e que o teste de uma conjectura possa levar à formulação de novas questões.

Figura 4 Momentos na realização de uma investigação

<i>Momentos de uma investigação</i>	<i>Actividades</i>
Exploração e formulação de questões	Reconhecer uma situação problemática Explorar a situação problemática Formular questões
Formulação de conjecturas	Organizar dados Formular conjecturas
Teste e reformulação de conjecturas	Realizar testes Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	Justificar uma conjectura Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: Ponte (2003b, p.7)

Ponte (2003a) e Ponte, Brocado e Oliveira (2005) destacam no trabalho com investigação matemática, o papel do professor, pois este tem um papel determinante nas aulas de investigação. Na realização destas tarefas na sala de aula, a discussão final é um dos momentos mais importantes para a institucionalização das aprendizagens e até, para a exploração de novos caminhos.

Outro ponto a destacado por Ponte, Brocado e Oliveira (2005) é sobre o ambiente de aprendizagem em sala de aula que deve ser propício para que os alunos se sintam à vontade

e motivados, que tenham tempo para executar a atividade e que suas ideias sejam valorizadas. Nesse tipo de atividade é importante que o professor consiga orientar e manter os alunos motivados no desenvolvimento da atividade, além do que deve ajudá-los na superação das dificuldades que possam aparecer e avaliar seu desempenho, avanços e retrocessos.

Por fim, a atuação do professor em cada fase de uma investigação é fundamental para que a atividade possa fluir e para que os alunos consigam produzir um novo conhecimento. E apesar de se constituir em um desafio para o professor, certamente vai contribuir para seu desenvolvimento profissional e para a melhoria de sua prática pedagógica.

Considerações Finais

A investigação matemática, como uma alternativa metodológica, pode fornecer aos alunos de quaisquer etapas de ensino situações de aprendizagem que os levem a compreender os conteúdos matemáticos. No entanto, o professor precisa se sentir preparado para executar esse tipo de aula e ter bastante clareza sobre as etapas do processo de investigação. É preciso que o professor assuma o seu papel como mediador do conhecimento e, por meio de suas orientações, que os alunos obtenham sucesso ao realizar uma investigação matemática.

Outro ponto importante na atividade de investigação matemática é o ambiente de aprendizagem que será criado em sala de aula. O professor precisa conhecer bem seus alunos e estabelecer uma boa relação com eles. Pois, como bem colocado por Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas e Ferreira (1998), o professor necessita criar um ambiente de trabalho onde os alunos se sintam à vontade para pensar, argumentar e expor suas ideias, sem medo de serem avaliados negativamente pelos colegas ou pelo professor.

A autonomia do aluno em um trabalho de investigação é fundamental, e isso implica a necessidade de o professor deixar o aluno agir de forma autônoma e incentivar os diálogos dos alunos com seus pares. O trabalho colaborativo é imprescindível e o professor intervir, quando necessário, para que esse tipo de trabalho ocorra, sempre respeitando as ideias dos colegas.

Por fim, o trabalho com investigação matemática pode contribuir fortemente para a aprendizagem dos alunos em matemática, uma vez que os coloca como investigadores do conhecimento a ser construído, contribuindo não somente para o aumento da autoestima do aluno, mas também para o desenvolvimento das capacidades de se raciocinar em busca de soluções, de comunicar suas ideias e de argumentar matematicamente.

Referências

BORASI, R. Exploring mathematics through the analysis of errors for the learning of mathematics. v. 7.(3). **FLM Publishing Association**. Canada, 1987

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2018.

BRAUMANN, C. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. In: PONTE, J. P.; COSTA, C.; ROSENDO, A. I.; MAIA, E.; FIGUEIREDO, N.; DIONÍSIO, A. D. (Org.). **Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores**. Coimbra: 2002. p. 5-24.

ERNEST, P. **The Philosophy of Mathematics Education**. London: RoutledgeFalmer, 1991.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Revista Zetetiké**. Ano 3, nº 4. 1995

FONSECA, H., BRUNHEIRA, L., & PONTE, J. P. As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. **Actas do ProfMat 99**. Lisboa: APM, 1999.

MENEGHETTI, R.C.G. **Constituição do saber matemático: reflexões filosóficas e históricas**. Londrina: EDUEL, 2010

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **An agenda for action**. Recommendations for school Mathematics of the 1980s. Reston, VA: 1980.

NATIONAL Council of Teachers of Mathematics. NCTM. **Principles to Action: Ensuring Mathematical Success for All**. Reston: NCTM, 2014.

NATIONAL Governors Association Center for Best Practices – NGA Center e do Council of Chief State School Officers – CCSSO. **Common Core States Standards for Mathematics**. Washington, DC: NGA Center e CCSSO, 2010.

PONTE, J.P. OLIVEIRA, H.M.; CUNHA, M. H.; SEGURADO, M. I. **História de investigações matemática**. Editora: Instituto de Inovação Educacional, 1998a

PONTE, J. P., OLIVEIRA, H., BRUNHEIRA, L., VARANDAS, J. M., & FERREIRA, C. O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. **Quadrante**, 7(2), PP.41-70., 1998b

PONTE, J. P.M. da. Investigar, ensinar e aprender. **Actas do ProfMat**. CD-ROM, pp. 25-39 Lisboa: APM, 2003a.

PONTE, J. P. Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. **Investigar em Educação**, 2, 93-169. Portugal, 2003b

PONTE, J.P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 1ª edição. Belo Horizonte: autêntica, 2005

SACCHERI, G. **Euclid Vindicated from Every Blemish**. Editado e comentado por Vincenzo De Risi. Berlim: Birkhäuser, 2014.

WILDER, R. A base cultural da Matemática. In: Sociologia da matemática. **Cadernos de Educação e matemática**. n. 3, APM: Lisboa, 1998

Sobre os autores

Rosineide de Sousa Jucá

Professora Doutora em Educação Ciências e Matemática. Professora efetiva da Universidade do Estado do Pará e da Secretaria de Educação do estado do Pará. rosejuca@gmail.com.
Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-1386-3388>

Márcio Pironel

Professor Doutor em Educação Matemática. Professor do Instituto Federal de São Paulo – Campus Salto. Email: marcio.pironel@gmail.com.
Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-7360-0571>

Recebido em: 14/05/2022

Aceito para publicação em: 02/06/2022