LINGUAGEM, MODELOS MENTAIS E PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

LANGUAGE, MENTAL MODELS, AND MATHEMATICAL PROBLEMS

Ronaldo Barros Ripardo
Universidade Federal do Pará - UFPA
Claudete Marques de Medeiros
Universidade Federal do Pará - UFPA
Tadeu Oliver Gonçalves
Universidade Federal do Pará - UFPA
Renato Borges Guerra
Universidade Federal do Pará - UFPA

Resumo
Entender como se processa o conhecimento na mente humana é uma das atividades estudadas pela Psicologia Cognitiva. Fazem parte desse campo de discussão as representações e os modelos mentais, os quais têm interessado particularmente à educação, uma vez que situações de ensino e aprendizagem, principalmente nas que ocorrem por meio da resolução de situações-problema, requerem a (des)construção de modelos e representações. Neste sentido, trazemos para discussão como modelos mentais e linguagem se articulam na resolução de problemas matemáticos, a partir de um contexto didático de um curso de Licenciatura Plena em Matemática. Concluímos que a linguagem assume importância crucial devido intermediar as relações entre professor e aluno e entre esses e o conhecimento. No campo da matemática, esses temas são de extrema relevância em face da possibilidade de apontar novos horizontes didáticos para tal disciplina.
Palvras-chave: Linguagem Matemática. Modelos mentais. Representações mentais.

Abstract
Understanding how knowledge is processed in the human mind is one of the activities studied by Cognitive Psychology. Part of this discussion field are the mental representations and models, which have been of particular interest to education, considering that teaching and learning situations, chiefly the ones that occur by means of problem solving, require de (de)construction of models and representations. In this sense, we bring into discussion how mental models and language articulate with one another in the solving of mathematical problems, from the viewpoint of a didactic context of a Licentiateship in Mathematics. We come to the conclusion that language receives a crucial significance, because it intermediates the relationships between teacher and student and between these and knowledge. In the field of mathematics, these themes are of extreme relevance, considering the possibility of pointing out new didactical horizons for the discipline.
Keywords: Mathematical language. Mental models. Mental representations.

Introdução

O estudo das imagens mentais se enquadra como objeto pertencente ao domínio da Psicologia, que, nos últimos anos, tem relacionado parte de suas pesquisas à educação. O interesse é plausível e se justifica pela necessidade de compreender, em níveis mais profundos, como se processam na mente humana os mecanismos cognitivos que estruturam a construção do conhecimento. A formação de conceitos e a compreensão de fenômenos nos mais distintos campos de abrangência das disciplinas escolares necessitam do processamento e da assimilação de informações.

Kosslyn salienta que (1992) um dos atributos de nossa mente é a capacidade de contemplar coisas, eventos e objetos, que não estão necessariamente presentes em dada circunstância, por meio de representações desses objetos ou eventos. Mas, como se dá essa representação do objeto? O que é utilizado na/para a representação? O que pode ou não servir para representar?

Voltando nossa atenção para a sala de aula, especificamente para o ensino de matemática, ao enunciarmos uma situação-problema[1] aos nossos alunos, dificilmente nos questionamos sobre: Que representações mentais eles mobilizam no intuito de responder essa situação? Que imagens produzem? Qual a origem delas? Elas possuem relação com algum conhecimento precedente? Quais e como são eles? De que natureza são? Que modelos são ativados e/ou formados mentalmente?

Um dos modos de ter acesso a esses processos, assinala Stemberg (2000), é solicitando que as pessoas descrevam as suas representações mentais, contudo, a informação obtida não seria autoconfiável, uma vez que nem nós mesmos temos como acessar conscientemente nossos procedimentos de representação. Greca (2000, p. 78), por sua vez, salienta que "*las representaciones mentales son estados internos, será dificil decidir acerca de ellas: no podemos simplemente abrir el cerebro y 'mirar' cómo son*". Portanto, não há respostas prontas para indicar um modo seguro de ter acesso à compreensão de uma pessoa diante uma situação-problema, até mesmo quando esta compreensão é representada por meio de uma linguagem específica.

O processamento de uma informação, bem como a manipulação de determinado conhecimento, se faz com base na construção e no manejo de modelos mentais. Estes, por sua vez, possuem um vínculo estreito com as representações e imagens mentais. Do mesmo modo, a compreensão da linguagem também é relevante nesse processo, uma vez que é uma das maneiras de se ter acesso aos modelos.

Neste sentido, analisamos respostas dadas por alunos de um curso de Licenciatura Plena em Matemática a uma situação-problema, discutindo, com base em teorias que tratam dos modelos mentais (D'AMORE, 2007; GRECA, 2000; STEMBERG, 2000; KOSSLYN, 1992) e da linguagem (D'AMORE, 2007; GRANGER, 1995) como a linguagem pode auxiliar no processo de compreensão dos procedimentos mentais mobilizados pelo aluno na resolução de problemas matemáticos.

Representações, imagens e modelos mentais

Cada ser humano representa internamente, de algum modo, aquilo que conhece. Tais representações internas não são totalmente conhecidas nem pelo próprio indivíduo, como afirma Stemberg (2000), tampouco por terceiros, mesmo que o sujeito as externalize por meio de um sistema de representação determinado. Temos, portanto, de acordo com o autor, duas modalidades de representação: uma, na qual somente o sujeito cognoscente tem acesso, que é interna, mental; e outra, que pode ser compartilhada com outras pessoas, que é externa.

Ainda segundo o autor, uma segunda via de acesso às representações mentais seria por uma abordagem racionalista, na qual se tenta encontrar uma explicação plausível por meio de deduções lógicas. Esta alternativa vem sendo percorrida há séculos por muitos filósofos e nos últimos anos incluiu psicólogos cognitivistas, que incorporaram também estudos experimentais. Ambos estruturam seus estudos com base na diferenciação dos conhecimentos em dois tipos, o declarativo (que pode ser exposto a alguém) e o procedural (se refere à execução de procedimentos). Trataremos do primeiro tipo, pois nele se enquadra a resolução de situações-problema em matemática.

Duval (apud D'AMORE, 2007) afirma que as representações podem ser de produção intencional ou automática. Uma representação intencional é simbólica, é expressa segundo os códigos de

[1] Trataremos neste texto situação-problema e problemas matemáticos como expressões equivalentes.

uma linguagem (a língua portuguesa, a linguagem matemática, a linguagem musical etc.) podendo ter ou não um contexto interno à representação (um enunciado e uma fórmula, por exemplo) por meio de uma expressão mais figurativa (gráficos, caricaturas etc.) em que o significado visual pode ser autônomo (um retrato) ou depender de uma interpretação a ser formulada (um gráfico cartesiano). Já as representações automáticas são produções mecânicas que acontecem na tentativa de imitar um modelo, externo, como fenômenos físicos, e interno, como os sonhos.

Tanto um autor como o outro (DUVAL apud D'AMORE, 2007; STEMBERG, 2000) admitem a existência de uma modalidade de representação que acontece numa primeira instância dentro da mente do indivíduo, e somente em uma etapa posterior elas são externalizadas. Uma representação mental se estrutura com a formação de imagens e modelos mentais.

Stemberg (2000, p. 153) usa o termo *imaginação mental* como sendo "a representação mental das coisas (objetos, eventos, ambientes, etc.) que presentemente não estão sendo percebidas pelos órgãos sensoriais". Vecchio (*apud* D'AMORE, 2007) diz ser a expressão ambígua e admite que ela designe os processos de formação e manipulação de imagens figurativo-analógica. Stemberg (2000, p. 154) comenta que, para o psicólogo Paivio, "as imagens mentais são códigos análogos para os estímulos físicos que observamos em nosso ambiente". Imagem mental, segundo D'Amore (2007, p. 153), "é o resultado figural ou proposicional ou o resultado misto de uma solicitação (interna ou externa). [...] Ela pode mais ou menos ser elaborada conscientemente [...] (depende do indivíduo). Todavia, a imagem mental é interna e, pelo menos inicialmente, involuntária".

Para estes autores, a característica marcante de uma imagem mental é a semelhança física do objeto observado guardada na mente, uma espécie de fotografia do mesmo. A representação possui relações diretas e imediatas com objeto percebido em uma espécie de analogia, cujas características sensoriais são apreendidas pelos órgãos dos nossos sentidos. Todavia, outros autores acrescentam formas distintas de representação automática que não são unicamente do tipo imagética. Para Kosslyn (1992, p. 171), "mesmo se as imagens são usadas para representar informações, elas não podem, entretanto, ser a única espécie de representação que usamos".

Uma dessas outras modalidades ainda é fornecida por Paivio (STEMBERG, 2000) na teoria da *hipótese do código dual*. De acordo com esta teoria, além da representação mental do tipo imaginária existe também a representação mental verbal.

> Nossas representações mentais para palavras são representadas principalmente num código *simbólico*. Exatamente como um relógio digital usa símbolos arbitrários (algarismos) para representar a passagem do tempo, nossas mentes utilizam símbolos arbitrários (palavras e combinações de palavras) para representar muitas idéias. Um *símbolo* pode ser qualquer coisa que seja designada arbitrariamente para representar algo diferente de si próprio. Por exemplo, embora reconheçamos que o algarismo "9" seja um símbolo para o conceito da condição novense, representando uma quantidade de nove coisas, nada há quanto ao símbolo que de alguma forma sugira seu significado (STEMBERG, 2000, p. 154).

Essa modalidade de representação difere da analógica não-verbal, embora uma informação possa ser armazenada nos dois sistemas. Ou seja, podemos formar uma imagem mental da palavra *casa* sem necessariamente fazer a associação visual com o objeto. Sua principal característica é o uso de símbolos para designar coisas arbitrariamente, como acontece na língua e na matemática. A representação por um código verbal simbólico, no caso da língua, acontece principalmente com os substantivos abstratos. No caso da matemática, pelas representações algébricas e proposicionais.

Outra modalidade de representação mental é a da hipótese proposicional, criada por psicólogos como John Anderson, Gordon Brower e Pylyshyn (apud STEMBERG, 2000). Para estes, não criamos representação mentais por imagens, mas sim por proposições, que seria uma rede de significados tecida a partir da mobilização de vários conceitos.

> A idéia-chave é que a forma proposicional de representação mental não está nas palavras, nem nas imagens, mas, certamente, em uma forma abstrata de representar os significados subjacentes do conhecimento. Assim, uma proposição para uma frase não conservaria as pro-

> priedades acústicas ou visuais das palavras e uma proposição para uma figura não guardaria a forma perceptiva exata da mesma (CLARK e CHASE apud STEMBERG, 2000, p. 157).

Na concepção proposicional, as informações são apreendidas pelas imagens e pelo código verbal, entretanto, são processadas e armazenadas em forma de proposições, de modo que, quando necessário, tais proposições são evocadas recriando os códigos verbal e/ou imaginário. Manipulamos imagens e códigos simbólicos, todavia estes não ficam armazenados analogicamente ou acusticamente, mas sim, proposicionalmente.

Um aspecto interessante acrescido por Stemberg (2000) é a possibilidade de uma imagem mental ser formada mesmo que o objeto não esteja presente, ou seja, ao alcance dos órgãos sensoriais, e até mesmo representar coisas que não existem absolutamente em um espaço exterior à mente da pessoa. Em D'Amore (2007) há a referência quanto à motivação da emergência dessas imagens que podem advir do próprio indivíduo ou de estímulos exteriores.

Na teoria do código dual (STEMBERG, 2000), aborda-se uma segunda via que atende a perspectiva de uma representação para coisas abstratas ou inexistentes. A hipótese proposicional, em conformidade com as idéias de D'Amore (2007), aborda uma dimensão que faz conexões profundas com a capacidade humana para a linguagem, característica fundamental na diferenciação do ser humano de outros animais.

Greca (2000), em resumo, fala sobre duas modalidades de representações: a) externas, que podem ser do tipo linguística/simbólica ou pictórica/analógica; e b) mentais, que podem ser proposicionais ou imagéticas. Sua teoria vai ao encontro das ideias de D'Amore (2007) e Stemberg (2000).

Acreditamos que o conhecimento se forma a partir de conflitos cognitivos ativados por diferentes estímulos nas inúmeras situações de vivência do individuo, e, como D'Amore (2007), não são unicamente as representações mentais por meio de imagens mentais, verbais ou proposicionais que dão forma a esse conhecimento, e sim os modelos mentais.

De acordo com D'Amore (2007), nossa habilidade em dar explicações está diretamente relacionada com nossa compreensão daquilo que é explicado, e para compreender algo precisamos ter um modelo funcional dele. O conjunto de imagens mentais relativas a um mesmo conceito constitui o modelo mental. Por imagens mentais estamos adotando todas aquelas definições feitas anteriormente, ou seja, uma imagem mental é tanto uma representação analógica quanto verbal e proposicional.

> Um modelo mental é uma representação interna que atua como um análogo estrutural de situações ou processos. Sua função é dar conta do raciocínio dos indivíduos tanto quando tentam compreender o discurso como quando procuram explicar ou predizer o comportamento do mundo físico (SANTOS; GRECA, 2006, p. 394).

Pensar envolve a criação e a internalização de modelos simplificados da realidade. Entretanto, o conceito de tal realidade não pode ser considerado como unitário. Ao contrário, diferentes limitações e pressupostos são impostos ao significado atribuído na construção desse modelo, que, devido à sua subjetividade, difere de pessoa para pessoa.

Ao interagir com um conceito novo, uma situação nova, o sujeito vai, de acordo com as novas informações recebidas, agregando outras imagens às já existentes, não somente por um processo de acomodação como também por conflitos, em um processo dinâmico até chegar ao modelo mental, que seria o resultado final do processo de construção do conceito, quando uma das imagens se tornar estável. À medida que uma imagem mental não corresponder mais ao desejo de se compreender algo, outras vão se formando a partir destas, com características das anteriores misturadas a outras novas. Tem-se, assim, um modelo formado que responde a uma situação específica.

O perigo dessa estabilidade está na acomodação do conceito. Se o modelo mental construído não estiver "correto" há necessidade do rompimento dessa imagem para que uma nova imagem mais abrangente e correta seja acomodada, o que não é nada fácil. Os modelos mentais, gerados para resolver uma situação-problema, caracterizam-se por serem estruturas dinâmicas, incompletas, recursivamente modificáveis ou atualizadas (SANTOS; GRECA, 2006), isto porque os sujeitos, na medida em que organizam os modelos, vão agregando novos conhecimentos, vão fazendo ajustes até construírem um modelo estável.

A ideia de modelo, geralmente, está associada a um esquema, ou seja, quando se pensa em construir um modelo matemático que resolva uma situação-problema, de certa forma se pensa em que/quais esquemas serão criados para traduzir o modelo. Os esquemas são vistos como roteiros, como teorias informais, como procedimentos de um programa de computador e como analisadores linguísticos que são os instrumentos que avaliam a correção e a aceitação. Os esquemas, segundo D'Amore (2007), apresentam características específicas dado que contêm variáveis, ou seja, dentro de um esquema podem surgir subesquemas que organizam e modelam o conhecimento em diferentes níveis de abstração, representam conhecimentos e não constituem definições, na medida em que são representações de conhecimento e não só explicação.

Partindo das imagens mentais mobilizadas diante de uma informação nova, os esquemas vão se formando no intuito de se construir um modelo mental que se traduz para o contexto físico pela linguagem, de forma que o modelo subjetivo, formado na mente do sujeito que recebeu a informação, possa vir a ser, de certa forma, entendido por outros.

Comunicação em matemática à luz da teoria dos modelos mentais

A discussão sobre os modelos mentais, assentada, principalmente, nas vozes de D'Amore (2007), Greca (2000), Stemberg (2000) e Kosslyn (1992) traz contribuições interessantes quando transposta para o campo de análise do ensino de matemática. Em uma atividade de ensino o professor deve ser o responsável por criar ambientes de estímulos para que o aluno tenha acesso a um objeto que não é necessariamente perceptível sensorialmente.

Granger (1995) afirma que o objeto de estudo matemático é virtual, ou seja, existe apenas enquanto entidade mental. Desse modo, se coloca a seguinte problemática: O que fazer e como fazer para que os alunos representem mentalmente os objetos matemáticos e os manipulem de forma a construir o conhecimento matemático almejado pelo ensino da disciplina Matemática? E mais ainda: Que estímulos devem ser criados pelo professor? Como saber se os objetos representados pelo professor e pelo aluno são os mesmos?

Se uma imagem mental não possui obrigatoriamente uma existência real, concreta, perceptível sensorialmente, então, uma maneira de conhecê-la é por meio de uma representação externa, como assinala Stemberg (2000), ou, como designa Duval (apud D'AMORE, 2007), por uma representação intencional. Essa representação, obviamente, não pode ser exclusivamente do tipo figurativa.

> Algumas ideias são representadas de modo melhor e mais facilmente em figuras e outras em palavras. [...] Para muitas formas geométricas e objetos concretos, as figuras parecem expressar uma infinidade de palavras sobre o objeto em uma forma econômica. Por outro lado, se alguém lhe perguntar: "O que é justiça?", por mais difícil que seja descrever esse conceito abstrato em palavras, seria ainda mais difícil fazer isso pictoricamente (STEMBERG, 2000, p. 151).

A informação sobre um modelo mental, portanto, poderia ser descrita por meio de figuras, esquemas ou de uma expressão verbal. Todavia, adverte o autor, uma representação, seja ela qual for, jamais guarda todas as características daquilo que se pretende representar. Embora a palavra *gato* e a figura do animal possam dar uma noção bem próxima do que seja ele realmente, nem uma nem outra miam, ronronam ou comem peixe como um gato real. Portanto, pode-se ter modelos externos bem próximos dos modelos mentais internos, dependendo da abordagem feita, contudo, eles jamais serão iguais (STEMBERG, 2000).

Didaticamente, seria interessante aproximar os modelos mentais internos dos modelos mentais externos. Conhecer os modelos mentais internos que os alunos constroem dos conceitos matemáticos ajudaria na construção de modelos externos, o que facilitaria o processo ensino-aprendizagem. Entretanto, construir um modelo mental externo quase sempre é uma necessidade de atender a uma proposta determinada pelo professor, sob alguma forma de linguagem. Logicamente, esta tem que ser de comum compreensão entre os pares envolvidos, ou seja, a linguagem interior tem de ser convertida para uma forma na qual não obrigatoriamente o aluno tenha domínio. Nesta situação, o professor tem de afastar-se da forma "pura" da linguagem selecionada para a comunicação e adentrar no universo da linguagem do aluno, que não está mais na sua forma inicial. Esses dois fatores – atender a uma exigência e aprender uma nova linguagem – têm sido um grande empecilho na formação matemática do aluno.

A comunicação nas aulas de matemática ocorre basicamente utilizando-se os códigos de dois sistemas simbólicos distintos, o da língua portuguesa e o da linguagem matemática. Cada um desses sistemas possui características que o diferencia de outros sistemas e entre si. Tanto uma linguagem quanto a outra possui autonomia em termos de representação, sendo estruturadas por signos.

No Brasil é conhecida por aqueles que vão à escola, ou pelo menos pela maioria deles, as dificuldades que o aluno normalmente possui com o uso da língua portuguesa para representar seus conhecimentos.

> As dificuldades de representar verbalmente o próprio conhecimento estão diante dos olhos de qualquer professor [...]. O "bloqueio" expositivo ou a incapacidade de dar resposta a problemas são muitas vezes causados pela incapacidade de verbalização, por uma restrita e limitada possibilidade verbal (D'AMORE, 2007, p. 259).

A limitação verbal se estende, inclusive, para a compreensão de uma enunciação de um problema matemático. Ao enunciar uma situação-problema ao aluno usando a língua materna com a intenção de saber como o aluno mobiliza modelos mentais para resolver aquele tipo de situação, por vezes essa intenção é neutralizada devido o aluno não compreender exatamente o que propõe a verbalização do problema. Outras vezes, nem interessa ao professor conhecer o modelo mental do aluno, e sim apenas a resposta descrita por este em códigos que estejam em consonância com os seus.

Em resumo, a aproximação dos modelos mentais internos e externos pode ser comprometida pelo não domínio da língua portuguesa por parte do aluno, manifestado tanto pela dificuldade de compreensão e expressão textual como pela falta de sensibilidade e preparo por parte do professor para entender uma representação própria do aluno, que é a que expressa realmente o pensamento deste.

O caráter polissêmico das palavras do sistema da língua contribui para a formação de barreiras na compreensão de uma informação veiculada nessa linguagem. Além disso, requer o domínio em níveis menos superficiais de sua gramática, o que nem sempre é promovido pelo ensino de língua no interior das escolas, tampouco o ambiente extraescolar impulsiona nessa direção.

A linguagem matemática se destaca por conferir ao discurso matemático precisão, concisão e universalidade. Situações em que, na língua portuguesa, são necessárias várias palavras para descrevê-las, a linguagem matemática o faz com um número bem reduzido de símbolos. Esse poder de síntese é conferido pelo caráter estritamente formal dos signos matemáticos, pois poucos desses signos representam sentenças inteiras da língua, cada uma delas composta por um conjunto de palavras. Contudo, praticamente os mesmos problemas que se entrepõem ao domínio da língua portuguesa se estendem quase que similarmente na compreensão da linguagem matemática. Mesmo não existindo polissemia nos símbolos formais da matemática é necessário saber o que cada um significa, sendo que boa parte deles só evidenciam um significado no interior de uma sentença matemática, e outros carregam um sentido amplo demais para serem compreendidos isoladamente, como é o caso do símbolo $\int$ para o conceito de integral em matemática.

Assim, a expressão de um modelo mental interno via linguagem matemática não é a garantia de que tal modelo será assimilado por terceiros, uma vez que ambos precisam ter o domínio dessa linguagem em sua semântica e sintaxe.

Segundo D'Amore (2007), esse aspecto dual do ensino de matemática tem ocasionado o que ele chama de "paradoxo da linguagem específica". Para ele, o ensino seria comunicação, cujo objetivo principal é favorecer a aprendizagem do aluno. Nesse caso, deve ser feito em linguagem natural para evitar problemas de compreensão ocasionados pelo uso de uma linguagem específica da matemática, já que o aluno chega à escola expressando-se em sua língua materna. Outro objetivo seria fazer os alunos apreenderem, entenderem e se apropriarem da linguagem matemática, uma vez que ela é o veículo de comunicação próprio e legítimo dessa disciplina. Ou seja, não evitar o contato dos alunos com essa linguagem.

Desse evidente paradoxo didático e linguístico nasceria o que o autor chama de *matematiquês*, uma terceira língua híbrida das duas anteriormente citadas, falada tanto pelo professor quanto pelo aluno no segundo ciclo do ensino fundamental.

> De fato, quando se faz matemática, a comunicação não ocorre certamente na linguagem matemática dos matemáticos,

> mas também não ocorre na língua comum; assume-se uma sintaxe específica (às vezes complicada), uma semântica considerada oportuna e nasce uma língua estranha... (D'AMORE, 2007, p. 251).

Entendemos que esse *pidgin*[2] não se limita apenas às séries iniciais do ensino fundamental, como defende o autor. É um problema que se estende também ao ensino superior, nos cursos de Licenciatura em Matemática (RIPARDO; GONÇALVES, no prelo). Se no ensino fundamental o matematiquês se caracteriza por rasgos da linguagem matemática em meio a expressões verbais, no ensino superior o aluno tem dificuldade de associar a língua portuguesa à linguagem matemática na explicitação de uma resposta de um problema matemático (GHIRALDELO, 2006).

É difícil, portanto, o processo de exteriorização e/ou de construção dos modelos mentais internos e externos.

Para Ackermann-Valladolao (apud D'AMORE, 2007), a compreensão dos modelos deve ser tomada como uma coleção de capacidades para entender os(s) conceito(s) que estão embutidos no problema, de modo a levar o solucionador à construção de representações gráficas compatíveis ao processo de resolução. Entender o conceito e construir uma representação gráfica adequada passa pelo domínio de uma linguagem específica. Desse modo, o autor distingue dois momentos em que o modelo intervém na solução do problema: na de enfrentamento da situação-problema, em que existe um modelo e deve ser buscada a solução, que ele chama de fase descendente do modelo; e na da ação, em que se parte da situação real para a construção do modelo, a fase ascendente da situação real. A junção dessas duas fases é denominada de "maneira de o modelo intervir na solução" (Idem).

Na busca por solucionar uma situação-problema pode ocorrer que o aluno já tenha um modelo formado, que pode ser adequado ou não à resolução, mas pode ser que exista um modelo em formação que se mostrará adequado ou não adequado.

Seja na fase ascendente ou na descendente, faz-se necessário o uso de convenções mais ou menos explícitas em matemática, pois às vezes o conceito envolvido na situação-problema só é acessível para quem tem familiaridade com eles, ou seja, a pessoa possui modelos já formados, naquele esquema de acomodação de imagens que podem ser necessárias à construção de outro modelo, próprio àquela situação. Essa complexa relação se explicita tanto no momento do aluno apresentar sua resposta quanto na compreensão dele do enunciado da situação-problema, pois terá que lidar com termos da língua como substantivos, verbos, preposições, conjunções ou mesmo de conectivos lógicos matemáticos como *implica que, é igual*, *tal que* – da língua da matemática. Em outras palavras, exige uma competência linguística e uma competência matemática, dentre outras. Tais competências irão identificar que modelo(s) será(ao) adequado(s) ou não.

Se "todo matemático utiliza la lengua matematica, en simbiosis con su lengua natural" (GRANGER, 1995, p. 94) é preciso atentar para outra dimensão sobre as representações gráficas para um modelo mental. Duval (apud D'AMORE, 2007) salienta que uma produção intencional pode comportar representações semióticas do tipo não analógico (signos verbais ou formais, por exemplo) e analógicos (revelam aspectos mais figurativos, visuais). Esta última forma de representação é largamente utilizada em matemática, são gráficos, tabelas, diagramas, figuras geométricas, esquemas etc. De acordo com ele, diferentes representações semióticas não é condição para a compreensão do modelo, contudo, ajuda a diferenciar o objeto da representação.

Língua materna, linguagem matemática e outras representações semióticas, principalmente as icônicas, versatilizam a construção de modelos mentais e a comunicação em matemática, e, acima de tudo, favorecem a dinamização do ensino e da aprendizagem.

Representações e modelos mentais em um contexto didático

A situação-problema abaixo foi apresentada para alunos do terceiro ano de um curso de Licenciatura Plena em Matemática. O objetivo da atividade foi verificar o nível de compreensão desses alunos sobre conteúdos de matemática ministrados nos ciclos I e II do ensino fundamental,[3] ação justificada em face dos licenciandos estarem

[2] "Pidgin, também chamado de língua de contacto, é o nome dado a qualquer língua que é criada, normalmente de forma espontânea, de uma mistura de outras línguas, e serve de meio de comunicação entre os falantes de idiomas diferentes. [...] Os pidgin são improvisadas e não são aprendidas de forma nativa." (http://pt.wikipedia.org/wiki/Pidgin).

[3] O ciclo I corresponde ao 1º, 2º e 3º anos, e o ciclo II corresponde ao 4º e 5º anos, respectivamente.

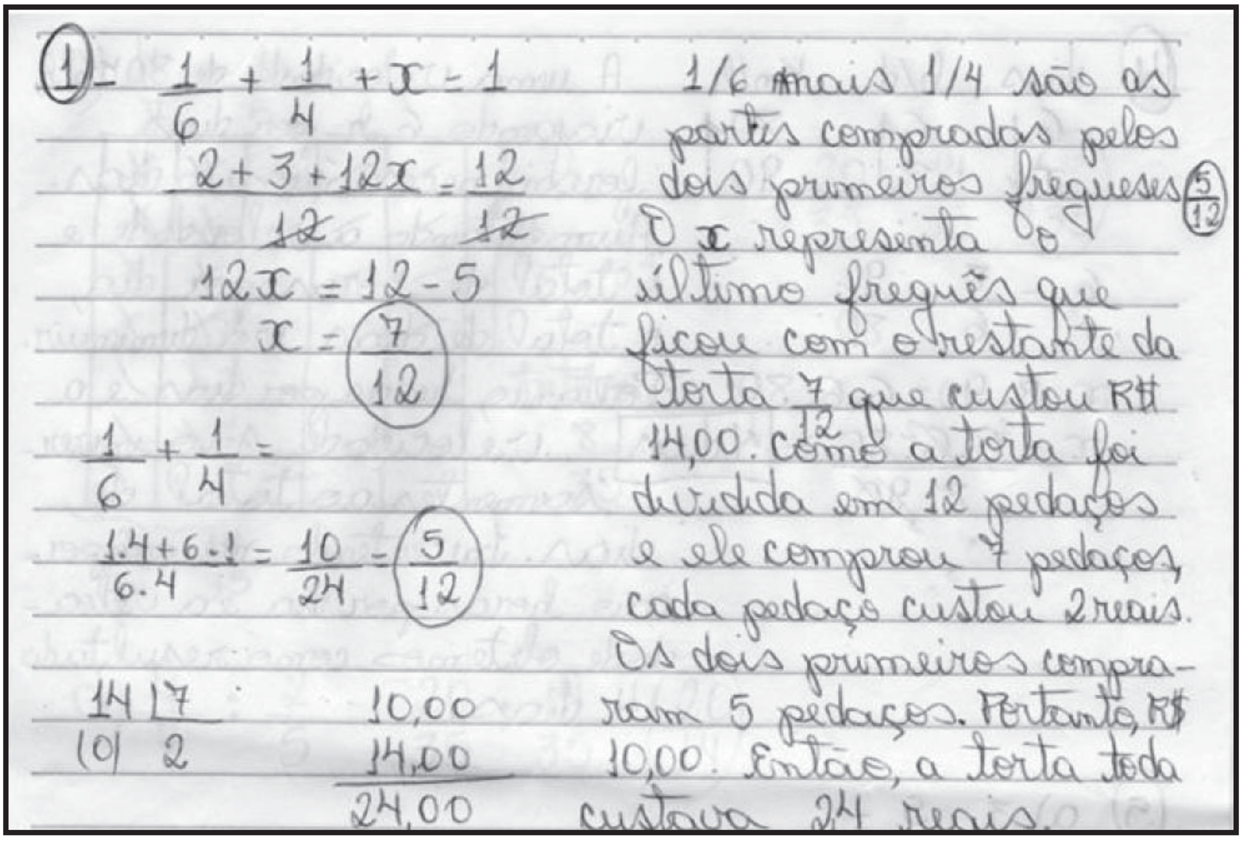
se habilitando para trabalhar com essa clientela do ensino básico. Algumas das respostas dadas por eles servem, no caso específico da discussão desse texto, para exemplificar alguns conceitos abordados, bem como para dinamizar o debate posto.

Situação-problema: Um freguês comprou 1/6 de uma torta. Outro comprou 1/4 O terceiro, que levou o restante, pagou R$14,00. Quanto custava a torta toda?

O problema acima expressa verbalmente com clareza os dados, o tipo de operação aritmética a ser usada, o conceito matemático envolvido e o que se deseja obter com a resolução da mesma. Aparentemente, a solução seria encontrada rapidamente por se tratar de uma turma de ensino superior e a complexidade do problema ser relativamente pequena. Contudo, a classe levou horas para chegar a uma solução e para demonstrá-la ao professor.

Na figura 1 se evidencia nitidamente como a língua e a matemática se relacionam na expressão de um conhecimento matemático.

Na primeira coluna, a representação semiótica do aluno em linguagem matemática mostra que ele conseguiu entender que a resolução do problema estava relacionada às estruturas aditivas envolvendo frações. Ou seja, ele associou um modelo mental já existente com a situação exposta, o algoritmo da adição de frações, que se mostrou adequado à situação.


1 - $\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + x = 1$

$\frac{2+3+12x}{\cancel{12}} = \frac{12}{\cancel{12}}$

$12x = 12 - 5$

$x = \frac{7}{12}$

$\frac{1}{6} + \frac{1}{4} =$

$\frac{1.4+6.1}{6.4} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$

14 | 7
10 | 2

10,00
14,00
24,00

1/6 mais 1/4 são as partes compradas pelos dois primeiros fregueses $\frac{5}{12}$ O x representa o último freguês que ficou com o restante da torta $\frac{7}{12}$ que custou R$ 14,00. Como a torta foi dividida em 12 pedaços e ele comprou 7 pedaços, cada pedaço custou 2 reais. Os dois primeiros compraram 5 pedaços. Portanto, R$ 10,00. Então, a torta toda custava 24 reais.

Figura 1: Resposta do aluno A

Segundo D'Amore (2007, p. 158), "um modelo externo de um conceito é a sua proposta comunicativa consciente, em alguma forma de linguagem, proposta feita por necessidade de (ou desejo de) comunicar". O algoritmo desenvolvido passo a passo não deixa dúvidas de que o aluno A conseguiu compreender o problema e chegar à solução requerida, o valor em reais da torta. Todavia, a situação-problema não foi apresentada a ele com esse simples objetivo, chegar a uma resposta matematicamente coerente da mesma.

Antes disso, o problema buscava verificar se tal aluno dominava o algoritmo da adição de frações e conseguiria contextualizá-lo em uma situação real, depois disso, apresentar de forma conexa ao professor as etapas que realizou mentalmente na mobilização de um modelo para a resolução. Diante desta imposição específica, o aluno percebeu ser a linguagem matemática muito sintética para comunicar o complexo percurso realizado, bem como o próprio modelo utilizado. Com isso, utilizou-se da língua portuguesa para descrever aspectos do raciocínio na formação do modelo para a situação (Figura 2).

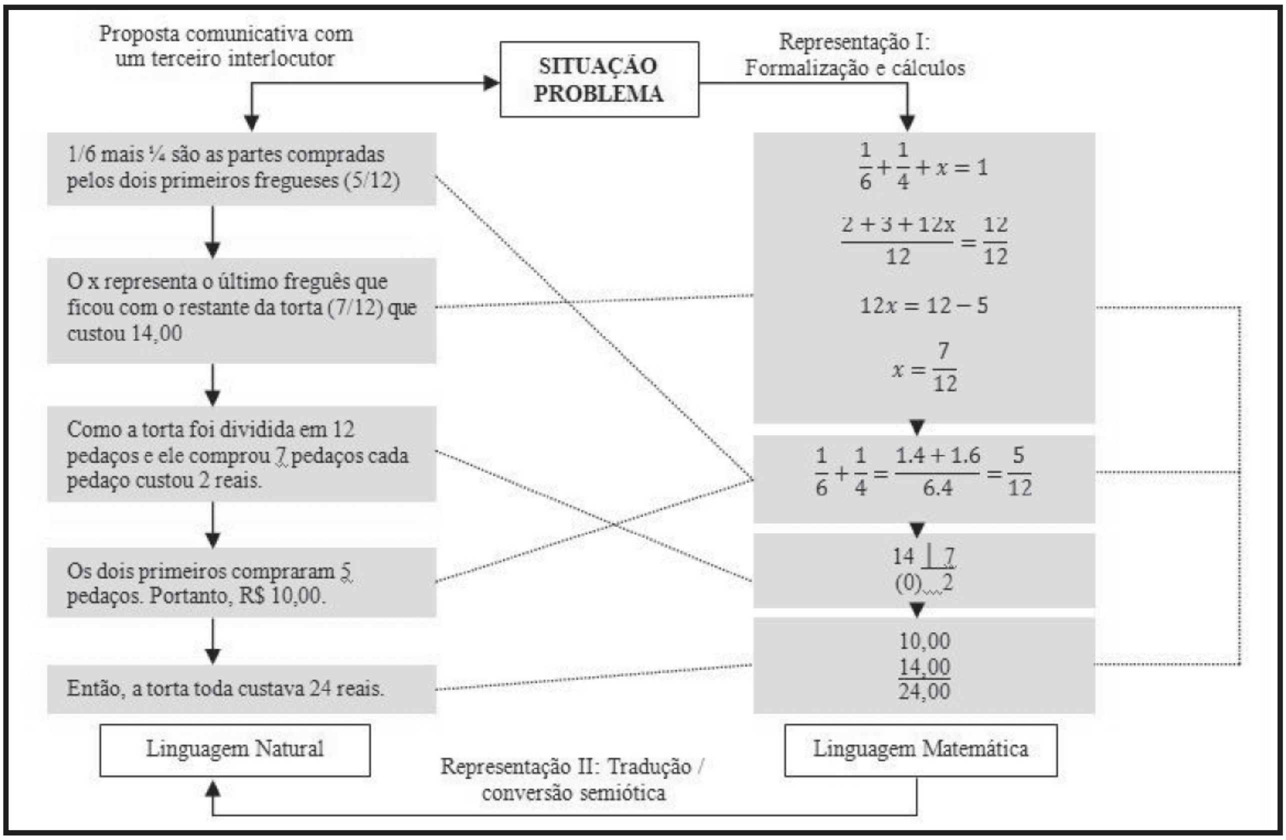


Figura 2: Análise da Resposta do aluno A

Provavelmente a representação primária para o problema não tenha sido propriamente nos códigos simbólicos da matemática, ou seja, podem ter sido figurais-icônicos, contudo, deve ter sido usada quase que simultaneamente a ela. Embora a conversão para a língua portuguesa tenha sido, supomos, para atender a uma exigência de interlocução com o professor, ela é fundamental para entender algumas das etapas na busca pela resposta, como, por exemplo, inicialmente somar as partes da torta comprada pelos dois primeiros fregueses e saber ao mesmo tempo em quantos pedaços iguais a torta foi dividida.

O modo como o texto da segunda coluna está organizado relaciona cada etapa do algoritmo a um período do texto, sendo que as frases evidenciam rasgos da formação do modelo. O aluno tenta da maneira mais consistente possível mostrar ao professor como utilizou um modelo mental para a resolução, todavia, a resposta, embora esteja bem organizada nos parâmetros da língua, o que vem demonstrar que ele tem o domínio da mesma, jamais fará com que o professor saiba de fato dos conflitos mentais internos do aluno. O modelo que se apresenta na resposta do aluno é, digamos, apenas a superfície do modelo mental interno.

> Não é em circunstâncias quaisquer que um indivíduo acompanha sua ação com atividades lingüísticas, mas o faz quando necessita planejar e controlar uma sucessão de ações que não estão dominadas por completo. Uma atividade automatizada não é de modo algum acompanhada por palavras, nem mesmo em voz baixa [...]. Aqueles para o qual isso é um problema [o conhecimento do algoritmo] são muito prolixos (VERGNAUD apud D'AMORE, 2007, p. 247, grifo nosso).

Externalizar um modelo mental, portanto, requer habilidades linguísticas bem estruturadas, sejam elas em linguagem formal ou natural. Mas, há que se considerar que quando estas não estão bem consolidadas cognitivamente no aluno, alternativas outras são buscadas para produzir um modelo mental intencional.

O aluno A (Figura 1) demonstra ter habilidades tanto para o manejo da língua quanto do algoritmo matemático, e isso fica visível na concatenação dos períodos frasais do texto com as etapas de desenvolvimento do algoritmo. Se a explicação proposicional desse aluno deixa claro que ele não executou meramente uma atividade automatizada, o aluno B (Figura 3) é mais "misterioso" quanto à descrição do seu modelo mental.

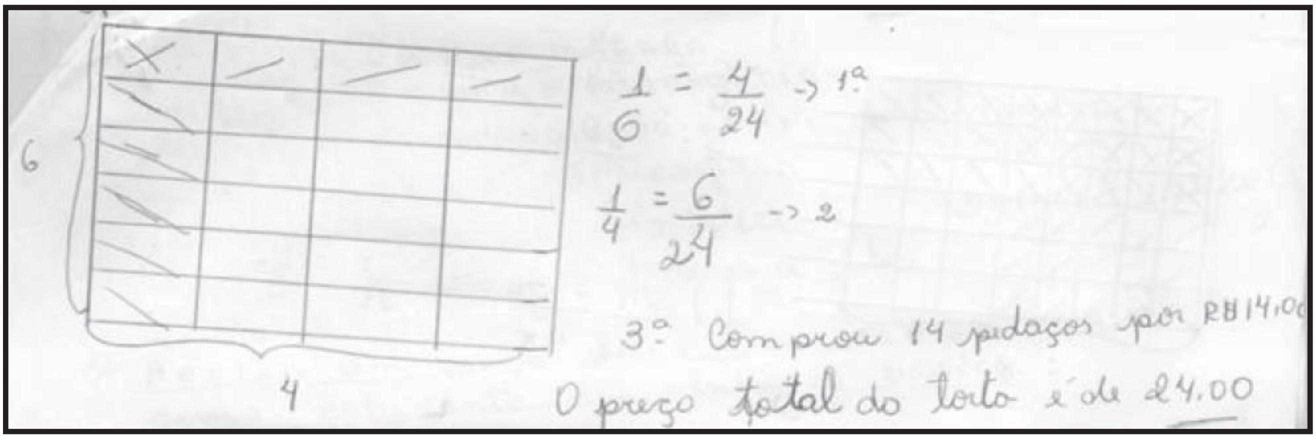


Figura 3: Resposta do aluno B

A resposta apresentada pelo aluno B se apresenta em um misto de linguagem figural com alguns códigos das linguagens matemática e materna. Entretanto, ao invés de dinamizar a apresentação de sua resposta, do seu modelo mental para o problema, elas são insuficientes para entender a solução encontrada. Para isso, faz-se necessário supor algumas etapas que só entenderá quem tem certa familiaridade com a matemática, no caso, o professor. Talvez tenha sido esse o motivo pelo qual o aluno tenha sido, como afirma Vergnaud (apud D'AMORE, 2007), tão prolixo.

Alguns teóricos, como Lee e Wheeler (D'AMORE, 2007), afirmam que no ensino fundamental os alunos tendem a evitar a escrita simbólica da matemática, preferindo expressarem seus conhecimentos matemáticos mais pela língua natural que pelo simbolismo próprio da matemática, mesmo não fazendo uso tão fluente da língua. No ensino superior, era de se esperar que a língua fosse usada com maior frequência pelos alunos, contudo, percebe-se que os alunos do curso de Licenciatura em Matemática tendem a evitá-la, preferindo comunicarem suas respostas quase que exclusivamente pela linguagem matemática, como se essa linguagem por si só fosse autossuficiente em uma explicação. Acreditamos que tal acontecimento se justifique pela falta de domínio da língua portuguesa, atrofiada pelo excesso de formalização matemática ao longo da trajetória acadêmica do aluno (RIPARDO; GONÇALVES, no prelo).

Na resposta do aluno B, porém, não há nem o excesso da língua nem do simbolismo matemático. Nesse caso, foi depositada demasiada importância à tentativa precária, por assim dizer, de demonstrar pelo método geométrico a adição de frações sem buscar suportes em outras formas de linguagem. O resultado é uma representação débil, carecendo de uma série de inferências para compreendê-la, e, consequentemente, o modelo mental do aluno.

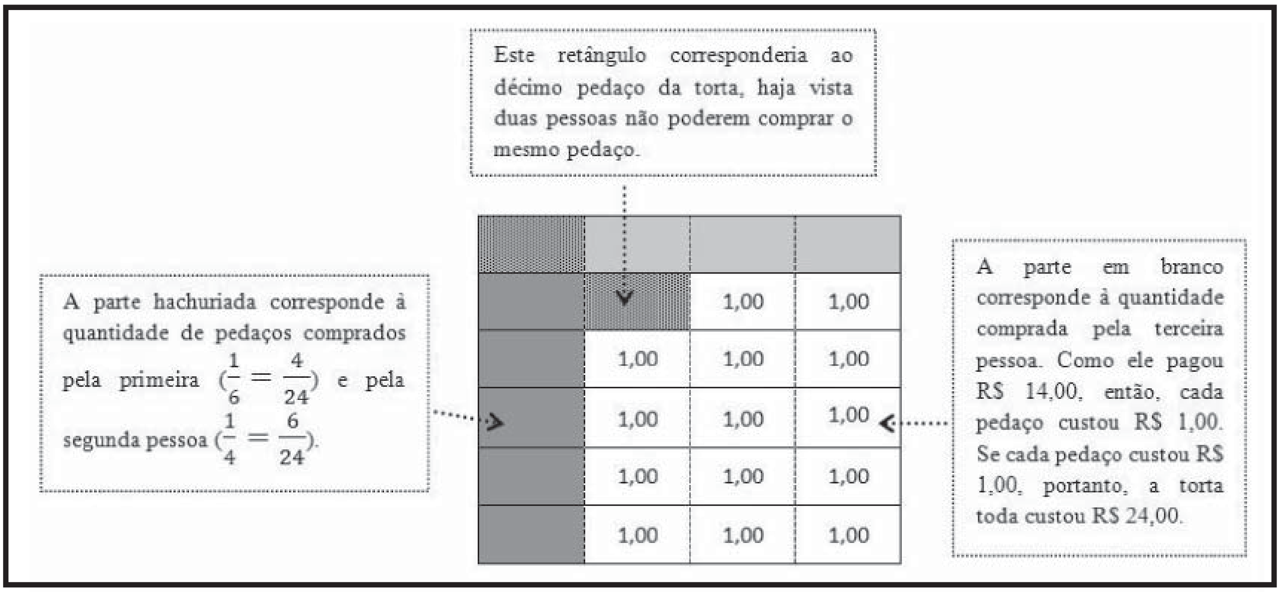


Figura 4: Análise da Resposta do aluno B

Algumas dessas inferências podem ser percebidas na Figura 4, na qual é rascunhada uma explicação um pouco mais completa na mesma modalidade de representação que fez o aluno.

Concordamos com D'Amore (2007), mesmo sendo seus estudos nessa área focados no ensino fundamental, quando este afirma que os alunos ainda mostram muita resistência para o uso do registro proposicional. A visão da maioria dos alunos é de que esse tipo de representação é simplesmente o texto pelo texto, uma atividade inadequada ao uso matemático. Outra característica dessa recusa é de natureza epistemológica mesmo, pois, "não apenas os símbolos matemáticos, mas também a própria língua comum, quando utilizada em Matemática, parece bem mais complexa, uma vez que, com poucas palavras, são dadas muitas informações" (D'AMORE, 2007, p. 254).

No problema, não foi preciso explicitar verbalmente algumas informações, como: o que é uma torta; que os numerais 1/6 e 1/4 referem a quantidades, mas são usados no texto como sinônimos da expressão "pedaços da torta" embora não apareça a palavra "pedaço"; o uso do termo "toda" acrescido à palavra "torta" serve para reafirmar o valor correspondente a soma das partes compradas pelos três fregueses; que o termo "restante" se refere ao que sobrou após a retirada da soma das partes do primeiro e do segundo freguês; que mesmo o primeiro freguês tendo tirado uma parte, embora a torta não custasse mais o preço inicial, para os pedaços restantes manteria a proporcionalidade do preço inicial. Similarmente, subentendeu-se que o contexto permitiria ao aluno saber que duas pessoas não poderiam comprar o mesmo pedaço, daí sobrarem quatorze pedaços e não quinze.

De modo geral, podemos dizer que em uma situação de estímulo, no caso exemplificado, verbal, cada um constrói à sua maneira um modelo mental próprio e diante de uma necessidade particular ensaia um protótipo de representação externa desse modelo e, embora existam múltiplas possibilidades semióticas para assim o fazer, a linguagem matemática e a língua materna são bem eficazes para os modelos mentais matemáticos. Consoante a isso, ao internalizar os estímulos e iniciar o conflito cognitivo que culmina com a estruturação interna do modelo, outras variáveis intervém no processo. Essas variáveis são principalmente conhecimentos prévios e subjetivos de cada pessoa.

À guisa de conclusão

Os modelos mentais são construções altamente subjetivas e, por isso mesmo, complexas para serem entendidas, tanto pelo próprio indivíduo quanto por outras pessoas. A consolidação de modelos passa por processos de conflitos cognitivos no momento em que as imagens e proposições são armazenadas.

Nesse caso, o uso de uma estrutura linguística com uma representação semiótica específica auxilia no processo, não só para comunicar o que se passa internamente na cabeça do aluno, mas para ajudar na resolução de eventuais situações-problema que se apresentem.

A atividade linguística é um suporte na formação do modelo e da resposta. Uma vez formado o modelo para aquele tipo de situação, as atividades posteriores semelhantes se tornam automatizadas, como é o caso do uso de algoritmos matemáticos na resolução de certos tipos de problemas. Na resolução da atividade apresentada pelo aluno B, pode ocorrer que ele não tenha compreendido a associação do algoritmo da divisão de frações com a resolução do problema, nesse caso, preferiu a utilização da demonstração geométrica, que foi por si só insuficiente para encaminhar a conclusão lógica da resolução do problema pretendida pelo aluno.

Portanto, é de extrema importância que o professor trabalhe em sala de aula possibilidades variadas de o aluno poder expressar seus modelos mentais para a resolução de problemas em mais de uma representação semiótica, pois, com isso, estará favorecendo a execução de ações que contemplem tanto o ensino quanto a aprendizagem de matemática, uma vez que os modelos se tornariam menos truncados nas tentativas de exteriorização. De resto, encerramos essa discussão com as palavras de Crockcroft (apud SÁNCHEZ E HUETE; BRAVO, 2006, p. 167), para quem "a capacidade de expressar com clareza o que se pensa deve ser um dos resultados de um bom ensino da Matemática..."

Referências

BORGES, A. T. Como evoluem os modelos mentais. *Ensaio – Pesquisa, Educação e Ciências*, v. 1, n. 1, p. 85-125, 1999.

D'AMORE, B. *Elementos de didática da matemática*. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

GHIRALDELO, C. M. A escrita (língua materna) em cursos de engenharias. In: ______. *Língua portuguesa no ensino superior*: experiências e reflexões. São Carlos: Claraluz, 2006.

GRANGER, G. G. *Estruturalismo y epistemologia*. Buenos Aires: Ediciones Nueva Visión, 1995.

GRECA, I. M. Representaciones mentales. *Actas del PIDEC*, n. 2, p. 69-105, 2000.

KOSSLYN, S. M. A capacidade para trabalhar mentalmente com imagens. In: STEMBERG, R. J. *As capacidades intelectuais humanas*: uma abordagem em processamento de informações. Porto Alegre: Artes Médicas, 1992. p. 169-193.

MACHADO, N. J. *Matemática e língua materna*: análise de uma impregnação mútua. 5.ed. São Paulo: Cortez, 2001.

RIPARDO, R. B.; GONCALVES, T. O. A produção textual de professores de matemática: um estudo a partir da prova dissertativa do concurso C-105 da Seduc/Pa. *Moara*, no prelo.

SÁNCHEZ HUETE, J. C.; BRAVO, J. A. F. *O ensino da matemática:* fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 2006.

SANTOS, F. M. T.; GRECA, I. M. (Org.). *A pesquisa em ensino de ciências no Brasil e suas metodologias*. Ijuí: Unijuí, 2006.

STEMBERG, R. J. *Psicologia Cognitiva*. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

Ronaldo Barros Ripardo.

Mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal do Pará – UFPA. Doutorando em Educação pela Universidade de São Paulo – USP.

Email: ripardo22@yahoo.com.br.

Claudete Marques de Medeiros

Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, área de concentração em Educação Matemática, da Universidade Federal do Pará – UFPA. Professora da Faculdade Metropolitana de Marabá – FMM, da Secretaria de Estado de Educação – Seduc do Pará e da Secretaria Municipal de Educação de Marabá.

Email: cmcmmedeiros@yahoo.com.br.

Renato Borges Guerra

Doutor em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual de Campinas (1987). Professor Adjunto da Universidade Federal do Pará – UFPA, junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas.

Tadeu Oliver Gonçalves

Doutor em Educação pela Universidade Estadual de Campinas (1987). Professor Adjunto da Universidade Federal do Pará – UFPA, junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas.

Email: tadeuoliver@yahoo.com.br.

Recebido em 26/10/2009

Aprovado para publicação em 16/11/2009