(RE)PENSAR A APROPRIAÇÃO DOS SIGNIFICADOS DOS CONCEITOS CIENTÍFICOS COM USO DE *SOFTWARES* DE MATEMÁTICA

(RE)CONSIDERING THE APPROPRIATION OF THE MEANINGS OF SCIENTIFIC CONCEPTS WITH THE USE OF MATHEMATICS SOFTWARE

Roberto Preussler
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha
Campus de Santa Rosa/RS.
Neiva Ignês Grando
Universidade de Passo Fundo/RS.

Resumo

No estado atual da educação matemática, cada vez mais são inseridos recursos das tecnologias da informação e da comunicação para potencializar as aprendizagens. Nesse sentido, este artigo visa apresentar os resultados de pesquisa qualitativa, a qual teve como objetivo analisar o processo de formação dos conceitos das funções trigonométricas seno e cosseno, no ensino médio, usando os *softwares* Cabri-Géomètre II e Graphmatica. Buscou-se fundamentação na matemática, na teoria histórico-cultural e na teoria dos registros de representação semiótica. A análise permitiu acompanhar a atribuição de sentido aos conceitos, mostrando a importância da utilização dos referidos *softwares* para os diferentes registros de representação e suas implicações nos processos de ensino e de aprendizagem.

Palavras-chave: Apropriação. Conceitos matemáticos. Softwares educacionais.

Abstract

Nowadays in Math education, more and more the information and communication technology resources are being inserted in order to potentiate learning. Under these circumstances, this paper aims to show the results of a qualitative research whose objective was to analyze the formation of the concepts of the trigonometric functions sine and cosine in the trigonometric cycle, in high school, where Cabri-Géomètre II and Graphmatica software have been used. The basic contributions come from the Math fundaments, from the historic-cultural theory and from the semiotic representation registers. The analysis allowed to monitor the attribution of meaning to the concepts, showing the importance of the use of such software for different representation registers and their implications in the teaching-learning process.

Keywords: Appropriation. Math Concepts. Education Software.

1 Introdução

Repensar as aprendizagens em matemática constitui-se um desafio constante aos educadores. Mudanças nas formas de aprendizagem, nas técnicas utilizadas, nas questões epistemológicas e metodológicas integram as mais diversas pautas acadêmicas. Nas últimas décadas, a informática, especificamente com os *softwares* de matemática, impulsionou ainda mais as discussões relacionadas às aprendizagens em matemática.

Ratifica-se essa ideia quando Penteado (1999, p. 297) afirma que "vivemos em uma sociedade em que prevalecem as informações, a velocidade, o movimento, a imagem, o tempo e o espaço com uma nova conceituação". Assim, abster-se dessas mudanças sociais, dos novos métodos, é não assumir possibilidades emergentes de mudanças qualitativas no processo ensino-aprendizagem.

Pode-se inferir que, no contexto social em que se vive e com os recursos tecnológicos disponíveis, as aprendizagens em matemática encontram-se potencializadas, especificamente, em virtude da vasta quantidade de *softwares* disponíveis aplicados à disciplina, os quais permitem de forma diferenciada, representar situações matemáticas, ampliando e resignificando as possibilidades de aprendizagem, principalmente na educação básica.

Nesse contexto, apresentam-se resultados de pesquisa desenvolvida com base em uma proposta de ensino-aprendizagem de trigonometria, no ensino médio, utilizando *softwares*. O principal objetivo desta pesquisa foi analisar o processo de formação dos conceitos das funções trigonométricas seno e cosseno no ciclo trigonométrico, usando os *softwares* Cabri-Géomètre II e Graphmatica.

Fez-se a opção por esses *softwares*, por considerá-los como recursos de possibilidades mediadores às aprendizagens em matemática, especialmente pelas suas diferentes representações geométricas. O Cabri-Géomètre II, por possibilitar o desenvolvimento de ações com geometria dinâmica, que, segundo Bernard, Tavares e Ortega Júnior (2000), permite representar dinamicamente a situação objeto de estudo, ou seja, quando é possível manter invariáveis as propriedades matemáticas envolvidas na manipulação dos objetos e, nesse caso, representar as propriedades das funções trigonométricas seno e cosseno e suas características no ciclo trigonométrico. A manipulação das ferramentas desse *software* possibilita abstrair características das funções e apropriar-se dos significados que compõem o conjunto de conceitos. O *software* Graphmatica, por possibilitar a representação gráfica dessas funções trigonométricas e, assim, identificar, abstrair e apropriar-se de características que envolvem os conceitos das funções.

Braga e Viali destacam a importância do estudo de funções, pelo fato de possibilitar "a observação de regularidades, a descrição de generalizações de padrões numéricos ou geométricos e a utilização da linguagem matemática para expressar fatos genéricos" (2011, p. 57).

As atividades foram desenvolvidas em duplas, com os alunos manipulando os *softwares* para se apropriarem dos conceitos propostos. O desenvolvimento da pesquisa caracterizou-se por encaminhar cada atividade – em folhas – orientando as interações e as apropriações dos conceitos dos sujeitos. No início da aula, eram feitos comentários gerais sobre o seu desenvolvimento para orientar o trabalho da dupla e, durante a atividade, procurava-se auxiliar os alunos apenas nos momentos de real necessidade, a fim de que fosse possível observar suas interações e apropriações. Ao final de cada atividade, eram reunidas as construções e definições dos grupos para definir, na ótica da matemática, os conceitos inerentes à atividade.

As interferências do professor/pesquisador nas duplas, quando necessário ou solicitado, ocorriam de forma a não responder diretamente, e, sim, a provocar questionamentos, procurando orientar o pensamento, discutindo e, se necessário, indicando a folha da atividade ou os arquivos dinâmicos dos *softwares*.

Assim, desenvolveu-se uma proposta que considerasse o pesquisador como professor na situação real de sala de aula, para, dessa forma, possibilitar, qualitativamente, a coleta de informações sobre o processo de formação dos conceitos das funções trigonométricas seno e cosseno nas interações dos sujeitos com as atividades, com os *softwares*, entre si e com o professor. As ações dos sujeitos para desenvolver as atividades propostas geraram os dados utilizados na análise, coletados por meio de registros de observações feitas pelo professor, em áudio e vídeo.

Na análise, destacaram-se as interações mais significativas que contribuíram para o processo e o modo como os diferentes registros de representação influenciaram na apropriação do significado dos conceitos das funções trigonométricas seno e cosseno.

2 Fundamentos da pesquisa

Para o desenvolvimento desta pesquisa, foram vitais os fundamentos da matemática, da informática educativa, da teoria histórico-cultural e da teoria dos registros de representação semiótica. A seguir, são apresentadas ideias de alguns autores que influenciaram decisivamente esse processo.

2.1 Noções da matemática

Caraça (1998) formaliza os fundamentos da matemática, incluindo o conceito de função e, em especial, das funções circulares seno e cosseno. Exemplificando o conceito de função, o autor apresenta a Tabela 1, a seguir, como um instrumento matemático para o estudo das variações quantitativas de espaço e tempo no fenômeno de queda de um objeto no vácuo. Propõe que se procure a regularidade do fenômeno na queda do objeto, medindo as alturas da queda em intervalos de tempo iguais, para, assim, estudar as variações dessas alturas de queda. Considerando as medidas, exemplifica o autor:

Tabela 1 – Medidas dos espaços em tempos iguais

tempos (em segundos)	0	1	2	3	4	5	...	
espaços (em metros)		0	4,9	19,6	44,1	78,4	122,5	...

Fonte: Caraça, Bento de Jesus. 1998, p. 118.

Esse autor mostra que a análise das medidas da tabela deve resultar na identificação de uma lei quantitativa, observando que não se encontrará toda regularidade entre os valores. Assim, salienta a necessidade de se encontrar correspondência entre o conjunto de valores da seguinte maneira:

> [...] em duas sucessões, dois conjuntos de números – o dos tempos, que representamos por *t*, e o dos espaços, que representamos por um conjunto *e* – postos em correspondência um com o outro, correspondência essa a qual podemos afirmar que é unívoca ([17]) no sentido de *t* para *e* [...]. (p. 118, grifos do autor).

A seguir, questiona: "Onde está a lei quantitativa de que aquela tabela nos dá apenas a primeira aproximação" (p. 119). E afirma: "A lei está na forma como essa correspondência do conjunto *t* ao conjunto *e* se realiza; se a correspondência mudar, mudarão os consequentes – aqui os espaços – mudará, por conseqüência, a variação, mudará a lei." (p. 199). Salienta que a *lei* se encontra na correspondência dos dois conjuntos: "Se por conseqüência queremos estudar leis quantitativas, *temos que criar um instrumento matemático cuja essência seja a correspondência de dois conjuntos.*" (p. 119, grifo do autor).

Ciente da necessidade de criar instrumentos matemáticos com correspondência para o estudo da função, Caraça ainda propõe:

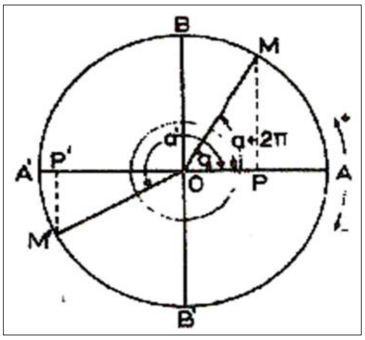
> Seja *t* a variável dos conjuntos dos tempos e *e* a variável do conjunto dos espaços; a lei consiste na existência de uma correspondência entre *t* e *e*, correspondência de que sabemos que é unívoca no sentido de $t \rightarrow e$. Diremos que a variável *e* é função da variável *t*, e escrevemos simbolicamente *e* = *f(t)*; à variável *t* antecedente da correspondência, chamaremos de variável *independente*; à variável *e* chamaremos de variável *dependente*. (p. 121, grifo do autor).

Dessa forma, ressalta que função, no campo matemático, caracteriza-se como um instrumento próprio para estudo de leis, mostrando sua definição da seguinte maneira:

> Sejam x e y duas variáveis respectivamente de conjuntos de número; diz-se que y é função de x e escreve-se y = f(x), se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido de $x \rightarrow y$. A x chama-se variável independente, a y variável dependente. (CARAÇA, 1998, p. 121, grifo do autor).

Definido o conceito de função, Caraça (1998) classifica algumas funções, em especial as circulares, objeto desse estudo, nas quais se encontram as funções trigonométricas seno e cosseno. O autor apresenta várias definições a partir de uma figura na qual define o raio e divide a circunferência com eixos perpendiculares da seguinte forma: "Seja [...] uma circunferência de centro *O* e raio $\overline{OA} = r$ e sejam $\overline{A'A}$ e $\overline{B'B}$ dois diâmetros perpendiculares." (p. 136, grifos do autor).

Figura 1 – Ciclo trigonométrico.



Fonte: Caraça, Bento de Jesus. 1998, p. 145.

Considerando o sentido e o sinal do arco, mostrados na figura, o autor afirma:

> Tomaremos o ponto A como origem de arcos sobre a circunferência, e convencionemos *tomar* como positivos os arcos no sentido da seta (sentido direto) e como negativos os arcos no sentido contrário (sentido retrógrado) – o arco *ABA'M'* é positivo, o arco *AB'M'* é negativo. (p. 136, grifo do autor).

Caraça define a relação entre ângulo e arco desta forma:

> A cada arco corresponde um *ângulo ao centro*, isto é, aquele ângulo cujo vértice está no centro da circunferência e cujos lados passam pelas extremidades do arco – ao arco *AM* corresponde ao ângulo *a*. Diz-se então que o ângulo *a* submete-se ao arco *AM*; um ângulo ao centro será positivo ou negativo conforme for positivo ou negativo o arco que ele submete. (1998, p. 136, grifo do autor).

Para definir a unidade de medida de arco, em radianos, o autor escreve: “Chama-se radiano aquele ângulo ao centro tal que o arco que lhe corresponde (que ele submete) tem um comprimento igual ao raio *r* da circunferência.” (p. 136, grifo do autor). Considerando a relação do ângulo central e em graus e radianos, Caraça destaca: “Como o perímetro da circunferência é $C = 2\pi$ [...]”, isto é, vale 2π raios, o ângulo ao centro vale 2π radianos, visto que cada raio (em arco) corresponde a um radiano (em ângulo) (p.136).

Ao definir os conceitos das funções trigonométricas seno e cosseno, Caraça faz referência à figura anterior e afirma:

> Chama-se *seno* do ângulo *a*, e representa-se por sen *a*, ao cociente do segmento $\overline{PM}$ (orientado sempre com origem em *P*, qualquer que se seja a posição de *M*) pelo raio *r*:
>
> $$\operatorname{sen} a = \frac{\overline{PM}}{r}$$
>
> Chama-se *co-seno* do mesmo ângulo, e representa-se por cos *a*, ao cociente do segmento $\overline{OP}$ (orientado, sempre com origem em *O*) pelo raio *r*:
>
> $$\cos a = \frac{\overline{OM}}{r}$$. (p. 137, grifo do autor).

A seguir, o autor mostra que, conforme os quadrantes em que a extremidade do arco se encontra, tanto para seno como para cosseno, esses podem ser positivos ou negativos. Apresenta as definições no seguinte quadro:

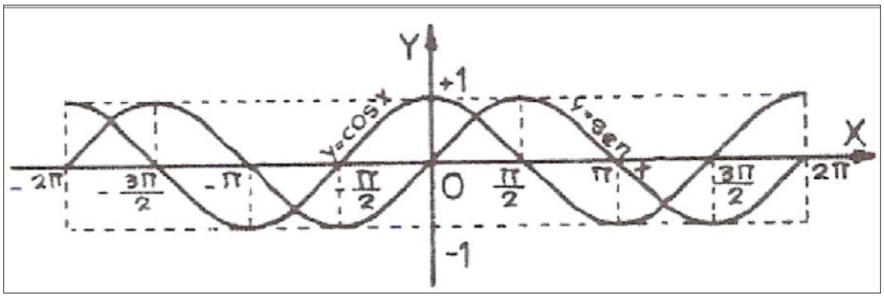
Tabela 2 – Sinais das funções trigonométricas seno e cosseno

	0	1°qdt.	$\frac{\pi}{2}$	2°qdt.	π	3°qdt.	$\frac{3\pi}{2}$	4°qdt.	2π
seno	0	pos.	+1	pos.	0	neg.	-1	neg.	0
cosseno	+1	pos.	0	neg.	-1	neg.	0	pos.	+1

Fonte: Caraça, 1998, p. 137.

Para a definição das funções *sen x* e *cos x*, o autor retoma o conceito de função e afirma que se representa pela seguinte notação *y = sen x* e *y = cos x* (p. 138). Para representar as imagens geométricas dessas funções, relaciona o ângulo, medido em radianos sobre o eixo das abscissas, com sua correspondente na ordenada. Assim, observando a figura a seguir, afirma que a imagem varia no intervalo de -1 a 1.

Figura 2 – Imagens geométricas das funções trigonométricas *sen x* e *cos x*.



Fonte: Caraça, Bento de Jesus. 1998, p. 147.

Para o autor, a periodicidade da função ocorre no intervalo de (0, 2π); assim, conclui que as funções *sen x* e *cos x* são periódicas e têm períodos 2π .

2.2 Informática educativa

As relações entre informática e educação matemática são um tema que no Brasil se tornou motivo de crescentes pesquisas, principalmente em busca de contribuições da informática para as aprendizagens em matemática. Para Gravina e Santarosa (1998), nos últimos anos, intensificou-se a produção de recursos tecnológicos que possibilitem uma aprendizagem que valoriza a ação e a experimentação do aluno sobre o fazer matemática. Ressaltam que, nas observações de suas pesquisas, as representações dinâmicas possibilitadas pelos *softwares* de matemática permitem no seu sistema de representação ampliar o caráter estático do conhecimento matemático.

> A instância física de um sistema de representações afeta substancialmente a construção de conceitos e teoremas. As novas tecnologias oferecem instâncias físicas em que a representação passa a ter um caráter dinâmico, e isto tem reflexos nos processos cognitivos, particularmente no que diz respeito as concretizações mentais. Um objeto passa a ter representação mutável. (1998, p. 4).

Ratifica Quintaneiro quando afirma:

> A representação de um objeto via software de geometria dinâmica constitui uma via de articulação de representações e articulação de imagens de conceito, uma vez que quando manipulamos a representação no computador temos a possibilidade de discutir as propriedades e registrar as ideia s envolvidas em uma linguagem natural ou em uma notação simbólica ou algébrica. (2010, p. 63).

Referindo-se aos *softwares* educacionais, Gravina e Santarosa afirmam que “o computador permite criar um novo tipo de objeto - os objetos ‘concreto-abstratos’”. Atribuem esse conceito aos objetos manipuláveis e defendem serem “concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados; abstratos por se tratarem de relações feitas a partir de construções mentais.” (1998, p. 3).

Com base nas ideias dessas autoras, é possível uma situação concreta gerar uma função, a qual pode ser representada na forma de gráfico, com ou sem auxílio de *softwares* de matemática. Porém, com o *software* é possível manipular vários gráficos ao mesmo tempo, alterar variáveis, inverter sentidos, observar invariantes, permitindo, dessa forma, abstrações matemáticas sobre relações construídas com a manipulação dos gráficos.

Num contexto mais geral, em pesquisa realizada utilizando o Cabri Géomètre II no ensino de matemática para 7ª e 8ª séries, Rigodanzo e Ângelo apresentam duas contribuições importantes: a primeira é relativa à aprendizagem dos conceitos geométricos, pois afirmam que “o uso do computador força a compreensão de detalhes importantes na formação de conceitos geométricos” (2004, p. 22); a segunda está relacionada à postura do professor na utilização da informática. Para esses autores,

> [...] a elaboração de atividades cujos passos levem os alunos a construir conceitos de geometria requer um tempo muito maior do que a preparação de uma aula expositiva sobre os mesmos conceitos. Esse tempo maior também se repete durante a transposição didática dos mesmos. (2004, p. 22).

Ratifica-se a ideia dos autores citado, com Penteado, pois essa apresenta a necessidade de uma nova postura educacional diante das novas formas de aprender utilizando a informática. De acordo com a autora,

> [...] a professora continua sendo a autoridade dentro da sala de aula, e é ela quem vai conduzir os alunos no sentido de explorar esse ou aquele conceito, mas a negociação entre ela e seu aluno parece ganhar força. O poder legitimado pelo domínio da informação não está só nas mãos da professora, e os alunos conquistam espaços cada vez maiores nesse processo de negociação. (PENTEADO, 1999, p. 305).

Eis, assim, questões substanciais que imprimem novas formas ao ensino-aprendizagem da matemática. As implicações educacionais tornam necessário discutir o potencial dos recursos e as diretrizes que oportunizam essas aprendizagens; exigem conhecimentos, técnicas e posturas diferenciadas dos educadores em razão das novas possibilidades cognitivas que se apresentam.

2.3 Sobre o processo de significação da matemática

Ao repensar o ensino-aprendizagem da matemática, buscou-se uma relação possível entre duas teorias: histórico-cultural e registros de representação semiótica, por possibilitarem analisar o processo de formação de conceitos e suas representações.

Vygotsky (2001) atribui expressiva importância às atividades de aprendizagem (que é relacionada à matemática) para a promoção do desenvolvimento mental no processo de formação de conceitos.

> [...] a aprendizagem não é, em si mesma, desenvolvimento, mas uma correta organização da aprendizagem da criança conduz ao desenvolvimento mental, ativa todo um grupo de processos de desenvolvimento, e esta ativação não poderia produzir-se sem a aprendizagem. Por isso, a aprendizagem é um momento intrinsecamente necessário e universal para que se desenvolvam na criança essas características humanas não-naturais, mas formadas historicamente (VYGOTSKY, 2001, p. 115).

Assim, observa-se que as situações de aprendizagem devem preceder o desenvolvimento mental. Para entender o que significa “apropriação do significado do conceito” e por entender que os sujeitos podem formar os conceitos nas interações sociais, sendo um conceito expresso por meio da linguagem, um aluno passa a integrar esse conceito à sua estrutura interna à medida que se apropria do significado da linguagem que representa o conceito científico. Como apropriar-se significa “tomar posse” (FERREIRA, 1999), o sujeito toma posse dos conceitos quando se apropria dos significados que o compõem.

No dizer de Vygotsky(1998, p. 138), “parece-nos óbvio que um conceito possa submeter-se a consciência e ao controle deliberado somente quando começa a fazer parte de um sistema”. Assim, sempre que um novo conceito é proposto, a sua aprendizagem é mediada por outros conceitos anteriormente formados. Dessa forma, inicia-se um processo de reconfiguração de conceitos em hierarquias, nas quais existem diferentes níveis conceituais. Sobre os níveis de conceitos, Vygotsky (1998, p. 138) afirma que “se consciência significa generalização, a generalização, por sua vez, significa a formação de um conceito supra-ordenado que inclui o conceito dado em um caso específico”. A relação entre os conceitos subordinados que mediaram o novo conceito supraordenado é que configura um “sistema de relações e de generalidade”, caracterizando a inclusão de um conceito científico num novo sistema de conceitos.

Vygotsky (2000) afirma que quando um aluno faz uso da linguagem para expressar um determinado conceito referente a um objeto, ele está, na verdade, classificando-o em categorias, numa classe de objetos que possuem certos atributos comuns.

Outra consideração teórica relevante a esta pesquisa encontra-se em Duval (2003). O autor apresenta uma teoria sobre os registros de representação semiótica na aprendizagem da matemática. Essa teoria auxilia na compreensão dos processos cognitivos pelos quais passam os alunos durante o processo da aprendizagem matemática e traz contribuições para a organização de propostas de aprendizagem, visto que aborda o funcionamento cognitivo do pensamento matemático por meio dos diferentes registros de representação semiótica. Observando a linguagem própria da matemática, apresenta entre as ideias principais de sua teoria que, para a compreensão de um objeto matemático, o aluno necessita fazer a conversão do mesmo objeto a uma forma de representação diferente. Afirma que "a originalidade matemática está na mobilidade simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação." (DUVAL, 2003, p. 14). Para o autor, "se o objetivo é acentuar a compreensão de uma noção matemática, *pode ser importante que tais seqüências sejam construídas por dois ou três pares de registros*" (DUVAL, 2003, p. 27, grifo do autor).

Ratificando, a opção pelos *softwares* Cabri-Géomètre II e Graphmatica justifica-se pela razão das possibilidades de representação de um mesmo objeto matemático, potencializando a apropriação de significados e o estabelecimento de relações entre os conceitos.

3 Analisando o processo de formação de conceitos científicos escolares

Para o desenvolvimento da pesquisa, foi organizada uma sequência didática composta de treze atividades desenvolvidas no laboratório de informática utilizando os *softwares* Cabri-Géomètre II e Graphmatica e alguns momentos em sala de aula. As atividades foram desenvolvidas no período regular de aulas e a turma, do segundo ano do ensino médio, era composta por 27 alunos de uma escola da rede pública estadual do município de São Luiz Gonzaga/RS – Brasil.

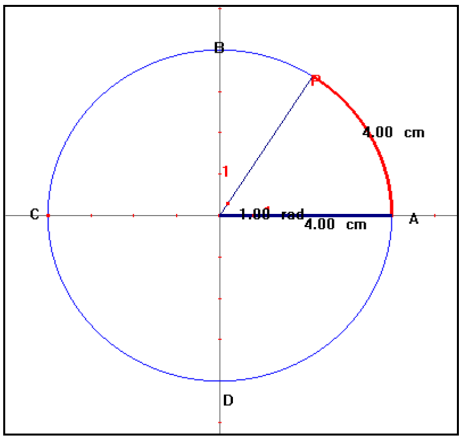
Todas as atividades de laboratório iniciavam com a manipulação de um arquivo dinâmico, o que servia como provocação/desafio aos alunos, levando-os à exploração, à análise e à busca de regularidades matemáticas. Os arquivos eram semelhantes a figuras ou representações encontradas em livros didáticos, porém dinâmicos.

No planejamento das atividades levou-se em consideração a necessidade de os alunos representarem e articularem os objetos matemáticos em suas diferentes formas de registros possíveis pelos dois *softwares*. Além disso, os conceitos construídos pelos alunos em seus grupos eram sistematizados e registrados na linguagem materna e simbólica.

Para a formação dos conceitos científicos das funções trigonométricas circulares seno e cosseno em suas representações algébricas, circulares e gráficas, seriam necessários conceitos prévios relacionados. Assim, a partir de observações realizadas na turma, constatou-se que os alunos necessitavam transpor conceitos relacionados da trigonometria no triângulo retângulo para o ciclo trigonométrico. Para isso, organizou-se uma atividade que os levaria a se apropriarem de ferramentas do *software* Cabri-Géomètre II e reconhecerem as relações trigonométricas do triângulo retângulo presentes no ciclo trigonométrico. Também foi necessário levar os alunos a identificarem relações existentes na circunferência trigonométrica entre ângulo central, arco de circunferência e raio.

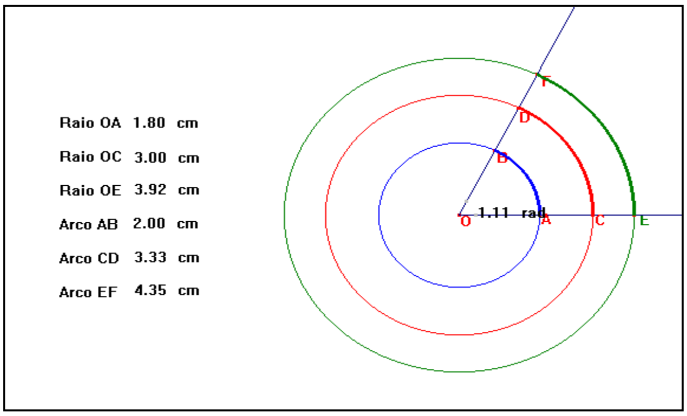
As três figuras a seguir, (Figuras 3, 4 e 5), apresentam os arquivos dinâmicos manipulados pelos alunos nas atividades de familiarização, os quais representam um caminho entre as relações trigonométricas do triângulo e as relações entre arco, raio e ângulo no ciclo trigonométrico.

Figura 3 – Arquivo dinâmico encaminhado na atividade.



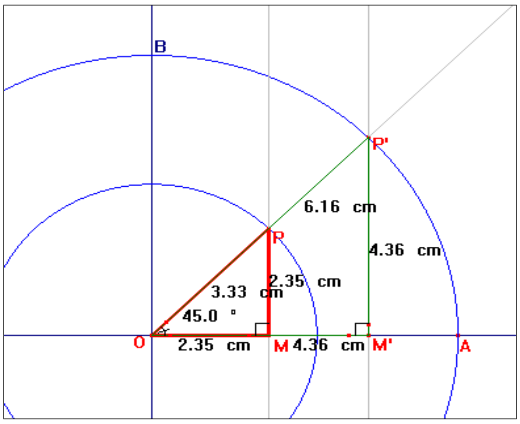
Fonte: os autores.

Figura 4 – Arquivo dinâmico encaminhado na atividade.



Fonte: os autores.

Figura 5 – Arquivo dinâmico encaminhado na atividade.



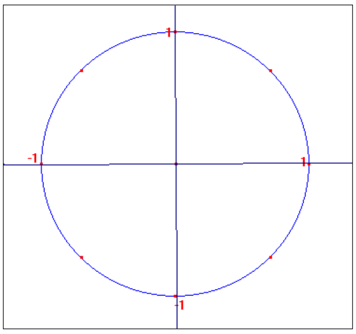
Fonte: os autores.

Para possibilitar o estabelecimento de relações matemáticas, as atividades eram guiadas por questões, cujas respostas exigiam o reconhecimento de regularidades matemáticas no processo de manipulação dos arquivos dinâmicos.

Na sequência, são apresentados alguns registros dos alunos e considerações sobre as observações que caracterizaram o processo de formação dos conceitos das funções trigonométricas circulares seno e cosseno.

Os dois registros a seguir mostram que, quando se consegue produzir pensamento reflexivo e intencional sobre objetos matemáticos em busca de regularidades matemáticas, esse pensamento se torna instrumento para apropriação de significados dos conceitos. Os dois resultados da mesma questão, de dois grupos de estudo diferentes, foram criados como resposta à seguinte questão: “Explique e indique na figura ao lado por que o sen 30° é 1/2”:

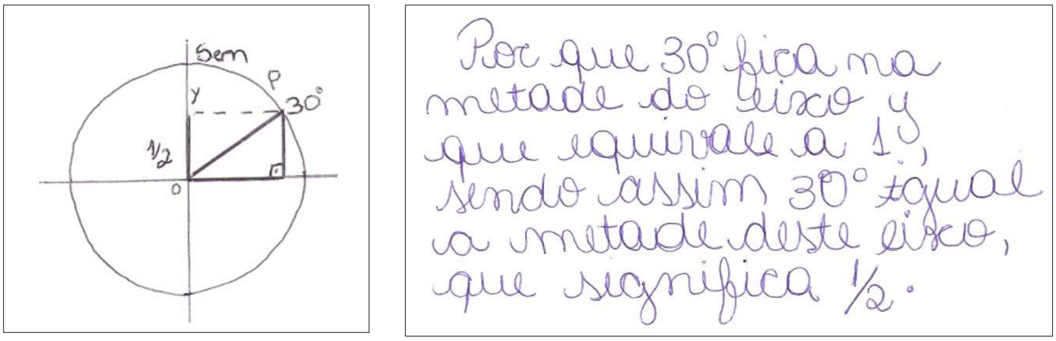
Figura 6 – Figura encaminhada na atividade.



Fonte: os autores.

O triângulo e as projeções da figura 7 foram criados pelos alunos.

Figura 7 – Registros construídos pelos alunos na atividade.



Fonte: os sujeitos da pesquisa.

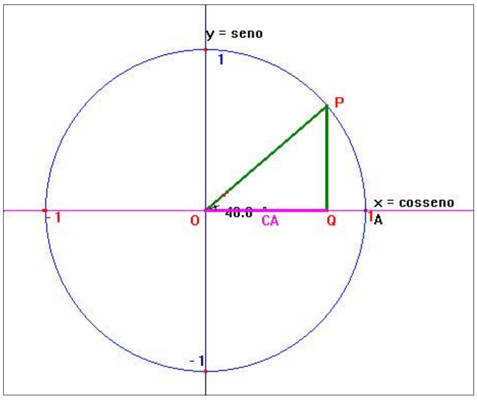
As representações dos alunos permitem muitas observações. Uma delas, quando o grupo associa o eixo das ordenadas (y) à função seno e registra. Consideração importante a esse registro é a necessidade de materiais pedagógicos que possibilitem fundamentar e responder dúvidas levantadas pelos próprios sujeitos nas interações produzidas. Essa atribuição do eixo (y) como valor da função seno foi encontrada numa figura em um livro didático presente na sala. Houve discussão entre os sujeitos, muitos argumentos, até que mais respostas semelhantes foram encontradas em outros livros. Mesmo com olhar de incerteza, acostumados a ouvir o que era certo, eles definiram. As manifestações dos sujeitos em qualquer situação de aprendizagem deve permitir mais autonomia nas interações produzidas.

Outra observação desses registros é que os sujeitos retomam as representações anteriores relacionadas ao triângulo retângulo, que anteriormente se caracterizou como "conceitos prévios", e as "reproduzem" no ciclo trigonométrico para justificar a resposta da questão. No desenho, se observa certa precisão ao marcar pela metade o raio do ciclo, com medida padrão igual a 1; também na distribuição do arco do primeiro quadrante em três partes, quando na primeira o aluno marca o ângulo de 30° e projeta sua medida com pontilhados sobre a ordenada (y), onde destaca 1/2. Interessante observar a força exercida pela representação da imagem na definição escrita ao lado da qual se destaca: "[...] *sendo assim 30° igual a metade deste eixo, que significa 1/2*.". Infere-se que, nesse momento, os sujeitos já teriam se apropriado do significado da definição da função trigonométrica circular seno quando associam a medida de sua projeção, marcada a partir da extremidade do arco relacionado ao ângulo central no eixo das ordenadas, o que segundo Caraça (1998), constitui-se na definição.

Em outra atividade realizada, os sujeitos deveriam se apropriar do significado do conceito da função trigonométrica cosseno e de suas características, constituindo-se o que Vygotsky (1998) chamou de "sistema de conceitos". Para análise das relações presentes nas interações dos sujeitos nessa atividade, apresenta-se partes da transcrição de um registro de áudio. Nesse, com frequência, os sujeitos fazem referência à atividade anterior na qual definiram a função trigonométrica seno. Para melhor entender esse registro serão referenciadas as falas de dois alunos e do professor[16]. A atividade era constituída de questões/provocações que levavam os sujeitos à manipulação dos arquivos dinâmicos do *software* Cabri-Géomètre II e à observação das regularidades nas discussões. Nessa atividade, os sujeitos manipularam o arquivo, representado na figura a seguir:

[16] Para referenciar as falas dos alunos, utilizou-se a letra maiúscula A, indicando a dupla, e o número subscrito 1 e 2 para indicar o sujeito da fala. Quando a letra for P, indica a fala do professor.

Figura 8 – Arquivo dinâmico utilizado para definição da função cosseno.



Fonte: os autores.

No registro, os sujeitos estabelecem o seguinte diálogo:

A_1 – Continua sendo igual a $\overline{OQ}$ e o cosseno continua sendo igual ao $\overline{OQ}$. Cateto adjacente ou $\overline{OQ}$.

A_2 – É, o cosseno continua sendo igual ao cateto adjacente ou $\overline{OQ}$.

A_2 – E agora, o que ficou aqui?

A_1 – Que independente do ângulo o cosseno vai ser sempre igual à medida do cateto.

A questão provocava os alunos a observarem a relação entre o cosseno de 45° e o segmento $\overline{OQ}$ representado na abscissa como sendo o cateto adjacente. Na discussão é possível observar que a dupla já se apropriou do significado do conceito da função cosseno, quando diz: "É, o cosseno continua sendo igual ao cateto adjacente ou $\overline{OQ}$". Em seguida, deveriam relacionar essa definição ao cosseno de 225° e 330°, ambos não marcados na figura. Para essa resposta, esperava-se uma regularidade matemática. Observe-se no diálogo a seguir como ocorreu esse processo:

A_2 – Ah, lembra que aqui é 270, aqui não tem 225! 270 como é que eu vou fazer?

A_1 – É foi isso que ele disse ó, assim ó.

A_2 – Se for solicitado para calcular o valor do cosseno de 225, qual a medida que você poderia atribuir ao cosseno sem calcular, apenas movimentando a figura?

A_2 – Ah, mas é o ângulo, não é! O ângulo de 270. Ah, mas aqui zera. Aqui é 270 né. 270! 270! Aqui é 180, né. Que medida você atribuiu, sem calcular, apenas.

A_1 – Não sei como que é. Eu não sei por que aqui zera, ó, vai fica 180 aqui.

A_1 – Ô professor! Olha isso aqui.

A_1 – Eu não sei, eu vou adivinhar que aqui é 225?

P – Não.

P – Não é.

P – Tá! Mas e se você não conseguisse marcar o 225 ali, o que vocês iriam deduzir para o valor do cosseno de 225°?

A_1 – É o cateto adjacente, a medida aqui.

A_1 – Tá, então escreve isso aqui.

A_1 – Só isso!

[...]

A_2 – Tá meu, o de 330 também a mesma coisa.

A_1 – Também!

A_2 – Quanto que deu o seno de 330?

A_1 – Olha, 330 vai entra no quarto quadrante lá, vai ou não.

[...]

A_1 – A gente já respondeu isso.

A_2 – Tá, independente do ângulo, o cosseno vai ser sempre igual ao cateto adjacente.

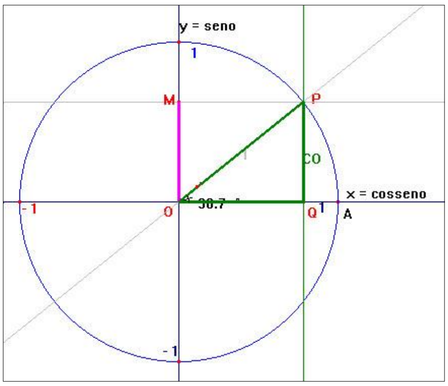
A_1 – Independente do ângulo, independente do quadrante, independente da circunferência.

Desse diálogo, emergem duas considerações importantes à formação do conceito da função trigonométrica cosseno como sendo a medida projetada sobre a abscissa. Observe que, mais uma vez, os conceitos prévios integrantes do sistema de conceitos se relacionam. Isso ocorre quando remetem às extremidades dos arcos, aos quadrantes e ao cateto adjacente definidos nas atividades anteriores. Outra observação é o papel do professor para certificar/validar as observações dos aprendizes, o que remete à ideia de ampliar propostas que valorizem a autonomia dos aprendizes diante de situações de aprendizagem.

Outras considerações relevantes da pesquisa ao processo de formação dos conceitos das funções trigonométricas seno e cosseno se ratificam com base na teoria dos registros de representação semiótica. As diferentes representações possibilitadas pelos *softwares* foram significativas no processo de formação dos conceitos. Aos sujeitos, em várias situações de aprendizagem, foram lançados desafios de representarem graficamente as funções circulares e abstraírem regularidades e características dessas funções.

A seguir, é apresentado o registro de outro grupo, no qual é possível acompanhar a transformação de registro no processo de significação de conceitos. Nessa, os sujeitos, manipulando o ciclo trigonométrico (Figura 9) a seguir, transpõem características da função seno organizando as respostas numa tabela (Figura 10). Observe-se que a resposta do sujeito está numa forma de registro diferente da figura. De forma semelhante, os sujeitos transpõem a resposta utilizando-se de uma terceira forma de registro quando associam os valores no gráfico (Figura 11).

Figura 9 – Arquivo dinâmico utilizado para definição da função seno.



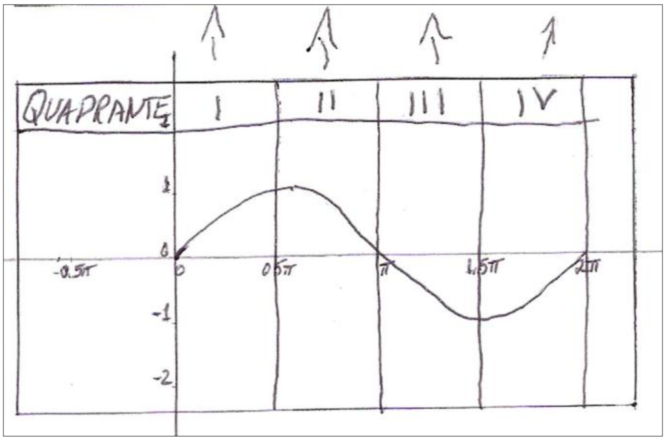
Fonte: os autores.

Figura 10 – Registro das características da função *y = sen (x)* na tabela.

Quadrante	I	II	III	IV
Arco	0 a $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ a π	π a $\frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$ a 2π
Sinal	+	+	−	−
Variação	cresce	decresce	decresce	cresce
	0 a 1	1 a 0	0 a -1	-1 a 0

Fonte: os sujeitos da pesquisa.

Figura 11 – Registro das características da função *y = sen (x)* no gráfico.



Fonte: os sujeitos da pesquisa.

Dividir a circunferência em quadrantes e representar o valor que corresponde ao intervalo do arco desse quadrante e seu respectivo sinal foi importante para que os alunos estudassem/analisassem a variação dessa função. Tal análise foi possível movimentando o ponto P sobre a circunferência (Figura 9) e observando o que acontecia com sua projeção sobre o eixo das ordenadas, observam e descrevem na tabela (Figura 10). Diferente e interessante a estratégia do aluno ao dividir o gráfico em quadrantes (Figura 11), nesse caso, a transposição das informações, inicialmente, do ciclo para a tabela-resumo e, posteriormente, para o gráfico. Eis o momento de reconhecer a importância atribuída por Duval à articulação de um objeto matemático em diferentes formas de registros, que permite maior mobilidade de pensamento conceitual e reforça o pensamento reverso. Pode-se observar essas características em diversas situações de aprendizagem; o "ir e vir" do pensamento em diferentes registros permite inferir que o sujeito já "possui" esse conceito.

Essa ideia pode ser confirmada na fala do aluno quando explica que no eixo x, do gráfico, estavam representados os intervalos dos arcos, do ciclo trigonométrico, por isso dividiu o gráfico conforme as medidas do ciclo. Assim, explicou também que no primeiro quadrante a função seno crescia até 1, indicando o eixo y. Depois, afirmou que até o final do terceiro quadrante decrescia a -1, demonstrando, assim, também, o intervalo da imagem da função.

As duas figuras a seguir são resultado de uma questão que solicitava aos alunos que construíssem os gráficos das funções *y = sen x* e *y = cos x* no intervalo de $\{0,\ 2\pi\}$ e observassem as semelhanças e diferenças nos gráficos.

Figura 12 – Gráfico da função *y = sen (x)*

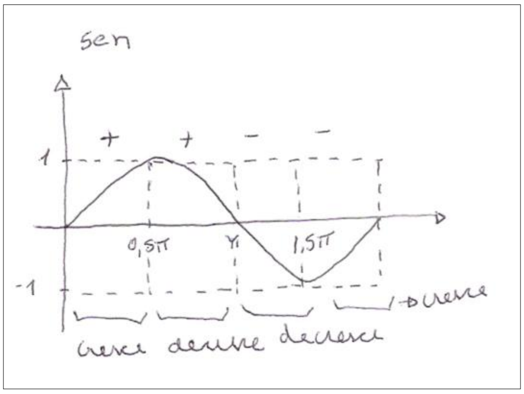
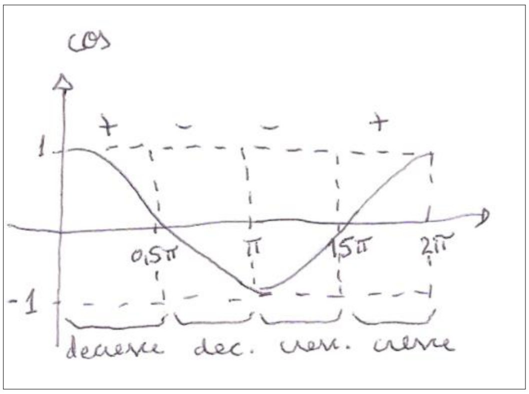


Figura 13 – Gráfico da função *y = cox (x)*



Fonte: os sujeitos da pesquisa.

Os alunos de um dos grupos representaram as funções nos gráficos (figuras 12 e 13) e acrescentaram o seguinte: "Observações: são contrários, sen começa crescente, cos decrescente, possuem o mesmo período, [...] Têm o mesmo sinal apenas no 1° e 3° quadrantes." Acrescentaram que para os dois gráficos $P = 2\pi$ e definiram o conjunto imagem como

Im={y Є R / - 1 ≤ y ≤ 1}.

Uma análise detalhada dos registros produzidos pelos alunos nos demais grupos e, inclusive, dos apresentados nas figuras 10, 11, 12 e 13 permite afirmar que, quando é possibilitada a interação e esta for dirigida por questões desafiadoras, é possível apropriar-se dos significados dos conceitos e características do objeto de estudo.

Considerações finais

A pesquisa sobre a experiência desenvolvida na escola permitiu a observação de aspectos importantes do processo de formação de conceitos científicos. Foi organizada uma sequência didática fundamentada contemplando recursos pedagógicos da área da informática. A articulação entre esses tornaram-se instrumentos provocadores do pensamento reflexivo e intencional, o que possibilitou aos sujeitos a formação de conceitos científicos.

Em sua pesquisa, sobre o uso de *softwares* com estudantes de ensino médio, Oliveira e Fernandes enfatizam essa questão, afirmando que "é preciso criar ambiências para que, no contexto de um trabalho que tenha por alvo construir conhecimentos e promover a autonomia dos estudantes, as tecnologias sejam mediadoras, auxiliando o professor em seu papel de orientação e promoção de interações" (2010, p. 555).

Nesse sentido, observou-se que a utilização da linguagem nas interações age de forma impulsionadora nesse processo de formação dos conceitos, principalmente quando os registros possíveis permitem múltiplas análises em busca das regularidades matemáticas que constituem o sistema que irá formar o conceito supraordenado.

Outro fator que influenciou o desenvolvimento das atividades foi a relação próxima dos alunos com os *softwares* e as habilidades na utilização de suas ferramentas, o que permitiu um domínio rápido e uma identidade dos sujeitos com esses recursos, favorecendo a exploração do dinamismo possibilitado pelos *softwares*, impulsionando o estabelecimento de relações matemáticas entre conceitos e representações. Essas relações originárias dos registros diferentes e dinâmicos flexibilizam o pensamento, permitindo ao sujeito identificar um mesmo objeto matemático em mais de uma representação semiótica.

Numa pesquisa desenvolvida com alunos do ensino médio, Damasco Neto (2010) também observou a importância da utilização de *softwares* como ferramentas para o estudo das funções seno e cosseno, possibilitando a manipulação dinâmica dos diferentes registros de representação semiótica.

No momento em que os alunos se percebem como sujeitos de sua própria aprendizagem e que ela acontece nas interações com os colegas e professor, observa-se que atribuem sentido cada vez maior direcionado à análise e à discussão em torno de um conteúdo. Valorizam a linguagem, permitem o diálogo e começam a acreditar mais em sua capacidade de conduzir o próprio aprendizado, tornando-se mais independentes do professor e de seu ensino. Isso torna-se decisivo para ampliar a autonomia dos sujeitos no processo ensino-aprendizagem e contribui significativamente para formar os conceitos científicos.

As contribuições de Vygotsky e Duval constituíram uma base teórica de fundamental importância, tanto para a elaboração da proposta como para o seu desenvolvimento na escola. Constatou-se que as orientações da teoria histórico-cultural e dos registros de representação semiótica trouxeram informações seguras para a prática pedagógica. Mais uma vez, percebeu-se a necessidade do domínio dessas teorias favorece indubitavelmente à prática docente, uma vez que orienta o planejamento e a organização adequada da situação de aprendizagem envolvendo materiais e estratégias.

Por fim, observou-se que é imprescindível ao educador manter-se em constante atividade de análise crítica com olhar de pesquisador. A pesquisa tem papel fundamental no enriquecimento da prática docente. Ela traz na formação inicial e continuada a leitura e discussão necessárias para a atualização profissional. Pesquisar significa estar aberto a novos conhecimentos, novas experiências, diferentes abordagens e discussões críticas. O professor disposto a esse trabalho se renova, se reformula. Pensa-se que, somente por meio de pesquisa e de práticas pedagógicas reflexivas, é possível tornar-se um professor que conhece como os alunos formam seus conceitos matemáticos e se percebe como e que relações matemáticas realizam na sua atividade de estudo.

Referências

BERNARD, Jorge; TAVARES, Rui Alberto Ecke; ORTEGA JUNIOR, Rubens Robles. O ensino de ciências exatas utilizando representações dinâmicas. In: Workshop de Informática na Educação da Universidade de Passo Fundo. **Anais...** Passo Fundo: Universidade de Passo Fundo, 2000. p. 77-83.

BRAGA, Elisabete Rambo; VIALI, Lorí. A planilha como suporte à compreensão dos conceitos das funções afim e quadrática. **Unión – Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 26, p. 57-71, jun. 2011.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática.** 2. ed. Lisboa: Gradiva, 1998.

DAMASCO NETO, José Roque. **Registros de representação semiótica e o geogebra:** um ensaio para o ensino de funções trigonométricas. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.

DUVAL, Raymond. Registro de representação semiótica e o funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Sílvio Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em matemática**: registro de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-34.

PENTEADO, Miriam Godoy. Tecnologia informática na educação matemática e reorganização do pensamento. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em educação matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999. p. 297-313.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo Aurélio Século XXI:** o dicionário da língua portuguesa. 3. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1999.

GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Maria Lucila. **A aprendizagem de matemática em ambientes informatizados.** 1998. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~edumatec/artigos/artigos.htm>. Acesso em: 10 mar. 2012.

OLIVEIRA, Gerson Pastre De; FERNANDES, Ricardo Uchoa. O uso de tecnologias para ensino de trigonometria: estratégias pedagógicas para a construção significativa da aprendizagem. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 12, n. 3, p. 548-577, set./dez. 2010.

QUITANEIRO, Wellerson. **Representações e definições formais em trigonometria no ensino médio**. 2010. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

RIGODANZO, Mauro; ÂNGELO, Claudia Laus. Uma experiência da transposição didática com o cabri-géomètre II. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo. SBEM, ano 11, n. 16, p. 16-24, maio 2004.

VYGOTSKYI, Lev Semenovich. Aprendizagem e desenvolvimento intelectual na escolar. In:______; LURIA, Alexander Romanovich; LEONTIEV, Alex N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem.** 7. ed. Tradução Maria da Penha Villalobos. São Paulo: Ícone, 2001. p. 103-107.

______. **A construção do pensamento e da linguagem.** Tradução Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

______. **Pensamento e linguagem**. Tradução Jeferson Luiz Camargo. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

Sobre os autores

Roberto Preussler
Licenciado em Matemática, Especialista em Informática na Educação – URI/SA, Mestre em Educação – UPF. Professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha - Campus de Santa Rosa/RS. Pesquisador do Grupo de Pesquisa Teoria Histórico-cultural e Educação Matemática/CNPq. Líder do Grupo de Pesquisa Processos de Formação e Ensino Aprendizagem em Matemática/CNPq.
E-mail: roberto.preussler@sr.iffarroupilha.edu.br
Rua Argentia nº 57. Bairro Central Santa Rosa/RS. CEP 98900-000
Telefones: IFF: (55) 3511 2575 Res: (55) 3513 0348 Cel: (55) 8115 9599

Neiva Ignês Grando
Licenciada em Ciências/Matemática, Especialista em Educação Matemática – UPF, Mestre em Psicologia Cognitiva – UFPE, Doutora e Pós-Doutora em Educação – UFSC.
Professora do Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade de Passo Fundo (UPF) – Passo Fundo/RS. Líder do Grupo de Pesquisa Teoria Histórico-cultural e Educação Matemática/CNPq. E-mail: neiva@upf.br
Rua Uruguai 1751 apto 1601. Bairro Boqueirão. 99010 112 – Passo Fundo –RS
Tel: (54) 3316 8451 (UPF) (54) 3313 3649 (res) (54) 99560125

Recebido em: 28/04/2013
Aceito para publicação em: 20/05/2013