Revista Cocar

Programa de Pós-Graduação em Educação
da Universidade do Estado do Pará

SOBRE O USO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

ON THE USE OF THE HISTORY OF MATHEMATICS IN THE TEACHING OF ALGEBRAIC EQUATIONS

João Cláudio Brandemberg
Universidade Federal do Pará - UFPA

Resumo
Neste artigo, cogitamos a inclusão da História da Matemática como componente metodológica para o ensino das equações algébricas, partindo da utilização de problemas de cunho histórico como uma possibilidade em sala de aula. Buscamos, em nossa abordagem, características que permitam, ao aluno, melhor compreensão dos conceitos envolvidos e dos processos de ligação entre o conhecimento atual e o antigo, uma vez que a resolução de equações será tratada a partir de exemplos particulares, que permitam essa ligação. Com isso, objetivamos possibilidades de uma aprendizagem efetiva e da relevância do papel da história no ensino de Matemática.

Palavras chave: Equações algébricas. História da Matemática. Ensino de Matemática.

Abstract
In this paper, we consider the inclusion of History of Mathematics as a methodological component for the teaching of algebraic equations from the use of historical problems as a possibility in classroom. We seek, in our approach, characteristics that allow the student to understand better the concepts involved and the processes of connection between both current and old knowledge, since the resolution of equations will be treated from particular examples, which allow this connection. With this, we aim at possibilities of an effective learning and the relevance of the role of history in the teaching of Mathematics.

Keywords: Algebraic equations. History of Mathematics. Mathematics Teaching.

Introdução

A utilização de aspectos históricos relacionados ao conteúdo é importante para se conhecer o desenvolvimento de conceitos matemáticos e essa importância se acentua quando pensamos em um ensino de Matemática que visa ao reconhecimento e, se possível, à contextualização dos conteúdos. Com nossa abordagem histórica, queremos relacionar as estruturas conceituais envolvidas e os processos de ligação entre o conhecimento atual e o antigo. Assim, resolução de equações é tratada a partir de exemplos particulares em alguns processos diferenciados que permitam essas ligações.

> Ao apresentarmos processos de resolução de equações algébricas a partir de exemplos particulares coletados em fontes originais queremos, ainda, proporcionar ao "estudante" o contato com os métodos utilizados, e as dificuldades encontradas, pelos matemáticos a época, para resolver estes problemas; e desta forma, criar possibilidades de comparação das estratégias de resolução antigas com as atuais, identificando suas vantagens e desvantagens (BRANDEMBERG e MENDES, 2005, p. 6).

Dessa forma, queremos, a partir de abordagens contendo aspectos históricos da Teoria das Equações, ter a segurança de uma aprendizagem mais efetiva e da relevância do papel da componente histórica no ensino de Matemática. Devemos frisar que uma teoria das equações é algo moderno.

Como podemos ver nas afirmações de Euler, em 1774, "a álgebra pode ser definida como, a ciência que nos permite determinar quantidades desconhecidas por meio de outras que são conhecidas." [1] (EULER, 1972, p.186. Tradução nossa) e de Lagrange, em 1798, "a principal preocupação da álgebra é a resolução de equações" (LAGRANGE, 2008, p.55).

[1] Algebra as been defined, the science which teaches how to determine unknown quantities by means of those that are known.

Revista Cocar
Programa de Pós-Graduação em Educação
da Universidade do Estado do Pará

Trazemos, então, um conceito do século XVIII que ainda permeia o nosso ensino médio, onde temos uma resolução de equações com ênfase ao desenvolvimento de sistemas numéricos. Entretanto, abrange uma inquietação que remonta a antiguidade, com métodos de resolução dos gregos, dos egípcios, dos babilônios e dos hindus.

Nas palavras de Bhaskara II, matemático hindu do século XII, encontramos: "aquele que é inteligente, por um método laborioso, consegue em alguns casos resolver um problema somente pelo raciocínio. Mas o método geral consiste em introduzir um símbolo para a incógnita" (BHASKARA II, 1150 apud BEKKEN, 1994, p. 11). Logo, a representação por uso de um símbolo se faz, inicialmente, em auxílio ao raciocínio, visando ao próprio entendimento e, posteriormente, como uma ferramenta de comunicação desses pensamentos, na difusão do conhecimento matemático. Uma característica presente em livros didáticos utilizados em nossas escolas atuais, onde encontramos exercícios do tipo $3 + \boxed{\cdot} = 8$ e expressões do tipo $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Portanto, a Álgebra em nossas escolas atuais trabalha com representações simbólicas, com as características do simbolismo introduzido por François Viète em 1591 e complementado por René Descartes em 1637, em que os símbolos representam, essencialmente, números e grandezas.

Dessa forma, nossa abordagem histórica se fundamenta nessa transição da Álgebra, de um estágio pré-simbólico (retórico e sincopado) para um estágio simbólico. Nossa pretensão é obter algum progresso no ensino de álgebra em sala de aula.

Alguns exemplos de cunho histórico

Aqui, apresentamos alguns exemplos de cunho histórico e os processos de resolução de equações algébricas coletados em fontes originais, que foram adaptados, visando proporcionar aos "interessados" o contato com os métodos utilizados, e as dificuldades encontradas, à época, para resolver esses problemas; e dessa forma, criar possibilidades de comparação das estratégias de resolução antigas com as atuais, identificando suas vantagens e desvantagens.

Exemplo 01: Resolver o problema 24 do papiro Rhind – uma quantidade adicionada de sua sétima parte resulta 19 (BEKKEN, 1994).

Resolução: usando o método da falsa posição, supomos uma solução falsa, que assumimos 7, por comodidade. Agora, $7+\frac{7}{7}=8$. Como operar sobre 8 para obter 19? Para isso eles (os escribas) utilizam produtos de 8 para ver quantas vezes o 8 "cabe" em 19. Temos: $2\cdot 8+\frac{1}{4}\cdot 8+\frac{1}{8}\cdot 8=16+2+1=19$, na linguagem do escriba $8(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8})=8(2\overline{4}\overline{8})=19$. Assim, obtemos a solução correta multiplicando o valor assumido pelo fator encontrado, isto é,

$$7(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8})=7(2\overline{4}\overline{8})=(2\overline{4}\overline{8})+2(2\overline{4}\overline{8})+4(2\overline{4}\overline{8})$$

$$=(2\overline{4}\overline{8})+(4\overline{2}\overline{4})+(9\overline{2})=16\overline{2}\overline{8}.$$

Em notação atual:

$$x+\frac{x}{7}=19 \Rightarrow 8x=19\cdot 7 \Rightarrow x=\frac{19\cdot 7}{8}.$$

Observação: $\frac{x}{7}=\frac{19}{8} \Leftrightarrow \overline{7}(16\overline{2}\overline{8})=2\overline{4}\overline{8}$. De fato,

Revista Cocar
Programa de Pós-Graduação em Educação
da Universidade do Estado do Pará

$$16\overline{2}\,\overline{8}+2\overline{4}\,\overline{8}=16+2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+2\frac{1}{8}=19.$$

Exemplo 02: Resolver o problema 32PR – Uma quantidade, a sua terça parte e a sua quarta parte adicionadas perfazem 2. Qual é a quantidade? (BEKKEN, 1994).

Sugestão: escolha 1, você obtém $1\overline{3}\,\overline{4}$. Tem que verificar quantas vezes $1\overline{3}\,\overline{4}$ “cabe” em 2. A conta é longa, o resultado é: $1\overline{6}\,\overline{12}\,\overline{114}\,\overline{228}$. De fato, $(1\overline{3}\,\overline{4})(1\overline{6}\,\overline{12}\,\overline{114}\,\overline{228})=2$. Em nossa notação: $\frac{19}{12}\cdot\frac{288}{228}=2$. (Em notação moderna $x+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=2$).

Exemplo 03: Resolver o problema “adaptado” - Uma quantidade, sua terça parte e sua quarta parte adicionadas perfazem 38. Qual é a quantidade? Sugestão: escolha um múltiplo de 3 e 4. (GILLINGS, 1972).

Resolvendo, temos $x+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=38 \Leftrightarrow \frac{19x}{12}=38 \Leftrightarrow x=24$. Pelo método da falsa posição, tomamos $x=12$ e obtemos $x+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=19$. Para obtermos o resultado esperado multiplicamos por dois.

Exemplo 04: Problema do tablete BM13901#1 – A soma da área e do lado de um quadrado (uma vez o lado) é $3/4$. Determine o lado do quadrado (VELOSO, 2007).

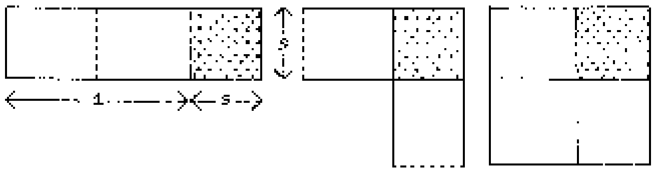
Solução algébrica atual (completamento de quadrados). $s^2+s=\frac{3}{4}$ (adicionamos $\frac{1}{4}$). Obtemos $s^2+s+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$ ou $(s+\frac{1}{2})^2=1$ de onde $s+\frac{1}{2}=1 \Rightarrow s=\frac{1}{2}$.

Solução aritmética antiga (receita babilônica).

Somei a área e o lado e obtive 45’ ou ($\frac{3}{4}$). Coloquei a metade de 1. Multiplicando 30’ por 30’ ou ($\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$). Somei 15’ a 45’ e obtive 1 ou ($\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$). 1 é o lado do quadrado (novo). Do interior de 1 tirei 30’. O resultado é 30’ ou ($1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$).

Solução geométrica (demonstração grega). Figura 1.

Figura 1: Ilustração para o completamento de quadrados



Fonte: Veloso, 2007

$$((s+\frac{1}{2})^2=(s^2+s)+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1).$$

O exemplo a seguir nos dá uma amostra da significativa contribuição do trabalho de Bhaskara II.

Exemplo 05: - Moça bonita, você que conhece os métodos da matemática, conte-me qual é o número: - Se você o multiplicou por 3 e adicionou 3/4 do resultado. Em seguida, dividiu por 7, e subtraiu1/3 do que encontrou. Finalmente, você elevou ao quadrado e, em seguida, subtraiu 52, para mais tarde tomar a raiz quadrada e adicionar 8. Finalmente, você dividiu por 10 e encontrou 2.

Resolução: Em notação atual, considere o número procurado x e realize as operações: $3x$; $3x+\frac{9x}{4}=\frac{21x}{4}$; $\frac{3x}{4}-\frac{x}{4}=\frac{x}{2}$; $(\frac{x}{2})^2-52$; $\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2-52\right)^{1/2}+8$; $(x^2-208)^{\frac{1}{2}}=\frac{6\cdot 20}{5}$; $x^2=16(36+13)$ e portanto $x=\sqrt{16\cdot 49}=4\cdot 7=28$

Um desenvolvimento histórico das equações algébricas

O estudo das equações faz parte do ramo da Matemática que conhecemos como Álgebra. Cerca de 3000 anos antes de ser criada a palavra álgebra, alguns povos já resolviam problemas por métodos, que, segundo a concepção moderna, podem ser considerados algébricos. Esses métodos envolviam, direta ou indiretamente, operações com quantidades desconhecidas.

O termo álgebra, de fato, só apareceu no século IX, extraído do livro "Hisab al-jabr w'al-muqabalah", escrito pelo matemático persa Mohammed ibn-Musa al-Khowarizmi, por volta do ano 825 d.C. Esse termo tem o significado literal de "transposição" (dos termos de uma equação).

No período que vai, aproximadamente, do século XVIII a.C ao século XVIII d.C, a álgebra teve por objetivo o estudo das equações e os métodos de resolvê-las. Nesse processo de evolução histórica da álgebra, podemos admitir a existência de três fases: retórica, sincopada e simbólica (BRANDEMBERG e MENDES, 2005).

A fase retórica compreende o maior período da história da álgebra (1700 a.C, 250 d.C). Nesse período, o estudo da álgebra foi verbal, ou seja, a argumentação de elaboração e resolução de um problema era dada em linguagem corrente, na forma de receitas, sem o uso de abreviaturas ou símbolos específicos. Os documentos sobre essa fase foram extraídos, principalmente, dos tabletes babilônicos (figura 2) e dos papiros egípcios (GILLINGS, 1972) e (ESTRADA et. al., 2000).

Figura 2: Tablete de argila babilônico

Fonte: Veloso, 2007

Vale ressaltarmos que tais problemas eram diretamente ligados ao cotidiano desses povos. Por exemplo, no caso egípcio, a incógnita (termo desconhecido), chamada *aha* [2], aparece no primeiro problema do papiro de Rhind (1750 a.C), onde é pedido para se determinar o valor de *aha*, dado que a soma dele com sua sétima parte é 19. Em notação atual, o problema poderia ser "equacionado" na seguinte forma: $x + \frac{x}{7} = 19$, no qual x representa o *aha*.

Até o século III d.C, essa foi a maneira de se trabalhar com os problemas algébricos. Nesse século, viveu Diofanto de Alexandria (250 d.C), e com ele, começou o que denominaríamos fase sincopada da álgebra (EVES, 2002).

Nessa fase, são introduzidas, paulatinamente, algumas abreviações de palavras comuns para simplificar a resolução de problemas, ou seja, passou-se a adotar uma combinação da linguagem corrente com algumas abreviaturas. Nesse caso, podemos

[2] Palavra que pode ser traduzida como "monte" ou "quantidade"

Revista Cocar
Programa de Pós-Graduação em Educação
da Universidade do Estado do Pará

ilustrar como exemplo o uso da letra p de *piu*, que significa "mais", durante o Renascimento, por alguns matemáticos italianos para indicar adição.

Lagrange (2008), um dos matemáticos de maior renome no século XVIII, considera que a Álgebra começa com Diofanto e a resolução de equações do 1º e 2º graus.

São clássicos os problemas atribuídos a Diofanto:

i) Encontrar dois números sabendo sua soma e sua diferença.

ii) Encontrar dois números sabendo sua soma e o seu produto.

O trabalho de Diofanto é de um valor incalculável, uma vez que ele é o "primeiro" a utilizar um símbolo para o termo desconhecido, e com isso vir a germinar uma das áreas de grande desenvolvimento na ciência matemática.

Na Europa, entretanto, o trabalho de Diofanto só se tornou conhecido cerca de cem anos após os europeus terem recebido o conhecimento algébrico através dos árabes, principalmente, com o *Al-jabrl* de Al Khowarizmi.

> Em uma linha histórica que tende a considerar Diofanto como o "Pai da Álgebra", pode-se considerar aspectos mais remotos, como, os textos egípcios (Ahmes) e os tabletes babilônicos, com seus exemplos de equações do primeiro e segundo graus. No entanto, o foco nas equações do terceiro e quarto graus, mesmo com essas considerações e sobre as influencias dos povos hindus, árabes e gregos, nos conduz ao período renascentista e aos problemas enfrentados pelos matemáticos italianos, mais especificamente por Tartaglia, Cardano e Ferrari e, posteriormente aos trabalhos de Euler e Lagrange. (BRANDEMBERG, 2011, p.13)

Como consequência dessa influência árabe, temos um novo (e longo) período dedicado à resolução de equações do terceiro grau (e a seguir de equações do quarto grau); cerca de dois séculos de trabalho árduo. Assim, questões mais ou menos elementares, como *encontrar dois números cuja diferença é* $a = 12$ *e sabendo-se que o seu produto multiplicado por sua soma é* $b = 14560$ ou *encontrar três números proporcionais cuja* *soma é* 10 *e o produto dos dois primeiros é* 6, são uma motivação, inicial, para o estudo dos processos de resolução de equações do terceiro e do quarto graus.

A fase sincopada (das abreviações) também compreende um longo período que vai desde o século III até o século XVI. Um tempo quando as Ciências, em particular a álgebra, no mundo ocidental, passam por uma fase de obscurantismo, por ser um estilo inconveniente de se resolver problemas, devido à falta de uniformidade, o que tinha, como consequência, uma dificuldade de comunicação entre os matemáticos.

Em acordo com Brandemberg (2010), no final do século XVI, teve início a fase simbólica, com os trabalhos de François Viéte (1540-1603), que, em 1591, introduziu a notação algébrica em seus estudos de Geometria e sistematizou a utilização de sinais e operações.

Em 1637, o filósofo e matemático francês, René Descartes, em seu *La Géometrie*, utilizou as primeiras letras do alfabeto (a, b e c) para designar as quantidades conhecidas e as últimas (x, y e z) para designar as incógnitas. Posteriormente, foram utilizadas outras notações, como do tipo "exponencial", com símbolos e sintaxe próprios (STRUIK, 1987).

O estilo simbólico, pelo grau de generalidade que propicia, foi um dos principais responsáveis pelo grande desenvolvimento da Matemática, verificado a partir do século XVII. Com isso, concluímos, mesmo que de forma resumida, um processo evolutivo do simbolismo algébrico. Finalizando, em acordo com Bekken (1994), vimos falando de três estágios na História da Álgebra: (1) O pré-simbólico, anterior a 1600, e que compõe os períodos retórico e sincopado dos babilônios aos árabes; (2) O simbólico-numérico, de 1600 a 1800 e (3) O simbólico-abstrato, posterior a 1800.

Sobre a resolução de equações

Revista Cocar
Programa de Pós-Graduação em Educação
da Universidade do Estado do Pará

O objeto principal da Álgebra é determinar o valor de quantidades ainda não conhecidas; essa determinação é, geralmente, feita a partir do que conhecemos como métodos de resolução de equações. Assim, exibir as soluções algébricas de uma equação significa obter suas raízes (ou zeros) a partir de relações entre seus coeficientes numéricos, usando, apenas, as ditas operações algébricas (adição, subtração, multiplicação, divisão e radiciação).

Do estabelecimento dessas relações e de suas manipulações, resultou a obtenção de fórmulas "resolutivas" para equações de grau menor que cinco $(n \leq 4)$. Assim, temos uma forma de exibir tais soluções, o que caracteriza os "métodos de resolução" entre os séculos XVI e XIX, que passamos a descrever.

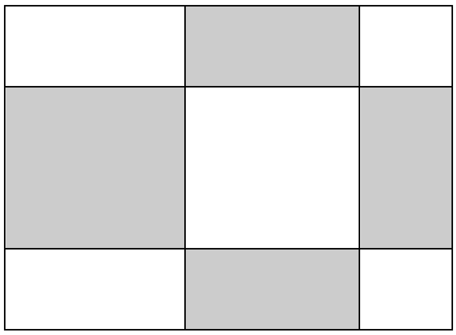
No entanto, vamos iniciar apresentando o método do matemático Al-Khwarizmi (780, 850) para a resolução de equações do primeiro e segundo graus, o qual é essencialmente retórico, isto é, escrito usando somente palavras, sem a utilização de símbolos. Suas resoluções são do tipo receita e sua justificativa é geralmente geométrica. Tratamos, assim, por sua influência no desenvolvimento de métodos posteriores. Como podemos ver no seguinte exemplo: "um quadrado e dez coisas somam trinta e nove".

A solução é: *você divide ao meio o número de coisas, o qual é cinco. Você multiplica por ele mesmo, o produto é vinte e cinco. Adicionando a trinta e nove, a soma é sessenta e quatro. Agora tome a coisa (raiz) dele que é oito, e subtraia o número de coisas a esquerda, o qual é cinco. O resto é três, que é a coisa do quadrado que você tomou. O quadrado é nove.*

Em notação moderna, temos a equação é $x^2 + 10x = 39$, que pode ser transformada em $(x+5)^2 = 39 + 25 = 64$ (completamento de quadrados), e de onde obtemos $x + 5 = \sqrt{64} \Rightarrow x = 8 - 5 = 3$.

A demonstração de Al-Khwarizmi, utiliza o conceito de área. O procedimento de cunho geométrico é o seguinte, tomar um quadrado ABCD de lado x, e sobre cada um de seus lados construir quatro retângulos, cujo outro lado é $(1/4)10 = 2{,}5$. Para obter a área do quadrado em questão, completa-se o quadrado maior e faz-se a diferença entre as áreas conhecidas. Conforme representado na figura 2 a seguir (BRANDEMBERG, 2007).

Figura 3: Ilustração geométrica do método de Al-Khwarizmi



Fonte: Brandemberg, 2007

Em acordo com van der Waerden (1985), na primeira parte do *al-jabr*, Al-Khwarizmi apresenta as soluções dos seis tipos de equações aos quais se podem reduzir todas as equações lineares e quadráticas, e que em notação atual escrevemos:

$$ax^2 = bx,\ ax^2 = b,\ ax = b,\ ax^2 + bx = c,\ ax^2 + c = bx\ e\ ax^2 = bx + c.$$

Onde a, b, c são números positivos. Com esses exemplos, temos informações suficiente para entender as ideias e o estilo tratado por Al-Khwarizmi no *al-jabr*.

Outro método para resolver uma equação do segundo grau que destacamos foi desenvolvido por François Viète (1540, 1603) e traz em sua constituição todas as influências de métodos anteriores, apresentando o início da fase simbólica. Consiste em transformar a equação completa $ax^2+bx+c=0$ em uma equação incompleta, desprovida do segundo termo, $b=0$, mediante ao que hoje chamamos de "substituição de variável", ou seja, substituir a incógnita x por uma incógnita auxiliar y, ligada a uma constante arbitrária h, da qual dispomos para anularmos o coeficiente do termo do primeiro grau na "equação transformada".

Igualando a zero o coeficiente de y, obtemos o valor de h que anula o coeficiente de y como $h=-b/2a$. Temos, então, uma equação do segundo grau incompleta $4a^2y^2-b^2+4ac=0$ (falta o termo do primeiro grau). Que resolvendo, nos dá $y=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Substituindo os valores de h e y obtidos, em $x=h+y$, temos: $x=-\frac{b}{2a}+\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, que é a fórmula geral de resolução das equações do segundo grau. Uma fórmula de resolução tratada nos livros brasileiros como fórmula de Bhaskara.

De fato, esse processo já tinha sido observado por Scipione Del Ferro (1465-1526), Nicollo Fontana Tartaglia (1550 -1557) e Girolamo Cardano (1501-1576) e foi generalizado visando à resolução de equações do terceiro e quarto graus.

Vejamos o método de resolução de uma equação do terceiro grau desenvolvido pelos matemáticos italianos e sua utilização em alguns exemplos particulares.

Consideremos a equação $ax^3+bx^2+cx+d=0$, com $a\neq 0$. (*Equação geral do terceiro grau*). Fazendo $a=1$ e $x=y-b/3$ e substituindo na equação

Revista Cocar
Programa de Pós-Graduação em Educação
da Universidade do Estado do Pará

$x^3+bx^2+cx+d=0$, temos: $y^3+(c-\frac{b^2}{3})y+(\frac{2b^3}{27}-\frac{bc}{3}+d)=0$.Agora, fazemos: $p=c-\frac{b^2}{3}$ e $q=\frac{2b^3}{27}-\frac{bc}{3}+d$, obtemos:

$y^3+py+q=0$ (*Forma Canônica*). Cuja solução é dada pela fórmula $x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$. Logo, para resolvermos a equação $x^3-3x+2=0$, fazemos a aplicação direta da fórmula e obtemos a solução: $x=\sqrt[3]{-1+0}+\sqrt[3]{-1-0}\Rightarrow x_1=-2$. As outras soluções são as raízes da equação do segundo grau: $x^2-2x+1=0\Leftrightarrow x_2=x_3=1$.

Para as equações do quarto grau, podemos também indicar uma fórmula que exprima suas raízes através de seus coeficientes. A existência dessa fórmula nos permite concluir que uma equação geral do quarto grau possui quatro raízes. O primeiro a atacar o problema de resolução de uma equação do quarto grau a partir do método de resolução de equações do terceiro grau foi Ludovico Ferrari (1522-1560).

Segundo Garbi (1997), em seu processo, inicialmente, Ferrari trabalhou a resolução de uma equação particular, $x^4+6x^2+36=60x$, a partir da qual encontrou um método geral de resolução. Um método que consiste em tomar uma equação geral do quarto grau, $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, e transformá-la em uma equação do tipo, $x^4+px^2+qx+r=0$, a qual pode ser reagrupada e reescrita de forma que os dois lados formem quadrados perfeitos, $x^4+(p+\alpha)x^2+(r+\beta)=\alpha x^2-qx+\beta$, para isso, os discriminantes têm que ser nulos. Essa condição nos fornece uma equação do terceiro grau em α, $\alpha^3+2p\alpha^2+(p^2-4r)\alpha-q^2=0$, cujo método de resolução já é conhecido.

Exemplificando, vamos resolver a equação: $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$. Vamos encontrar α e β, tais que $x^4 - (15-\alpha)x^2 + (24+\beta) = \alpha x^2 + 10x + \beta$, com ambos os lados da igualdade quadrados perfeitos. Isto é, $(15-\alpha)^2 - 4(24+\beta) = 0$ e $100 - 4\alpha\beta = 0$ de onde $\beta = \dfrac{25}{\alpha}$ chegamos à equação $\alpha^3 - 30\alpha^2 + 129\alpha - 100 = 0$, cujas raízes são: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 4$ e $\alpha_2 = 25$. Substituindo $\alpha_1 = 1$ e $\beta_1 = 25$, temos: $(x^2-7)^2 = (x+5)^2$. Assim,

$$(x^2 - 7) = (x+5) \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x_1 = 4 \wedge x_2 = -3 \text{ e}$$

$$(x^2 - 7) = -(x+5) \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_3 = -2 \wedge x_4 = 1.$$

As raízes da equação são: 4, -3, -2 e 1 (BRANDEMBERG, 2011).

> No período do renascimento, que descrevemos anteriormente, o trabalho de Al-Khowarizmi, que influenciou o trabalho dos matemáticos italianos, permitiu aos mesmos a criação de suas próprias notações. Um bom exemplo é a notação utilizada por Rafael Bombelli (1526, 1572) em seu livro: *L'Algebra* (1572). Na tentativa de generalizar o uso da fórmula de Cardano-Tartaglia (ao caso irredutível de uma equação do terceiro grau), Bombelli obtém o que ele chama de "um tipo de raiz cúbica", a qual apresenta em seu radicando a raiz quadrada de um número negativo. Bombelli encontra novos números que para ele não podem ser nem "mais" (positivo) nem "menos" (negativo), ele os denomina: "piu di meno" e "meno di meno" (o que atualmente representamos por $i = \sqrt{-1}$ e $-i = -\sqrt{-1}$). (BRANDEMBERG, 2010, p. 156-157).

Apesar do sucesso na resolução de equações do quarto grau, Euler (1972) é um dos primeiros a perceber a complexidade relacionada à resolução de equações de grau $n \geq 5$.

Como ele mesmo comenta no seu *Elements of Algebra*[3]:

[3] This is the greatest length to which we have yet arrived in the resolution of algebraic equations. All the pains that have been take in order to resolve equations of the fifth degree, and those of higher dimensions, in the same manner, or, at least, to reduce them to inferior degrees, have been unsuccessful:

> Isto é o mais longe que chegamos na resolução de equações algébricas. Todos os esforços realizados para resolver equações de grau maior ou igual a cinco, desta mesma forma, ou ao menos reduzi-las a equações de grau menor, não tiveram êxito: de tal forma que não podemos dar nenhuma regra geral para encontrar raízes de equações de grau superior a quatro (EULER, 1972, p. 286. Tradução nossa).

De todo modo, uma história das equações algébricas pode ser sintetizada, inicialmente, como a história da busca de métodos de resolução para uma equação geral de grau qualquer $n \geq 1$.

Considerações

Ensinar Matemática é bem mais que expor os conteúdos de forma organizada, é possibilitar uma aprendizagem conceitual efetiva. Dessa forma, a inclusão da história da matemática no ensino de Matemática, afirmamos, é uma das formas mais naturais deste fazer.

> O método de resolução de equações algébricas utilizados atualmente, tanto no ensino fundamental e médio quanto no ensino superior, está condicionado a obtenção de fórmulas resolutivas nos mesmos moldes de Bhaskara (século XII) e Cardano (século XVI), e onde o aspecto histórico dado ao ensino é somente de caráter ilustrativo ou novelesco. (BRANDEMBERG, 2007, p. 1)

Com uma abordagem, partindo da apresentação de atividades envolvendo problemas de cunho histórico, como os apresentados anteriormente, podemos propiciar aos estudantes, e sobretudo, aos professores que atuam na educação básica, um material que lhes permita relacionar as estruturas conceituais envolvidas e os processos de ligação entre o conhecimento atual e o antigo. Assim, a resolução de equações é tratada a partir

so that we cannot give any general rules for finding the roots of equations, which exceed the fourth degree.

de exemplos particulares em alguns processos diferenciados (métodos históricos), que permitam estas ligações.

> A história da Matemática é composta de questões relevantes, problemas e exposições, que são valiosos tanto em termos de conteúdo, quanto do seu potencial para motivar e despertar o interesse dos alunos. Acreditamos que um melhor ponto de vista da Matemática e da atividade matemática pode ser obtido a partir de questões históricas importantes, sejam elas fornecidas por fontes originais ou fontes adaptadas a língua local. (BRANDEMBERG, 2007, p. 10)

Assim, o emprego de exercícios de cunho histórico pode contribuir para o fortalecimento curricular, se amealhado junto a problemas usuais. Transversalmente, os estudantes passam a ter familiaridade com o desenvolvimento histórico dos conceitos e/ou assuntos, uma vez que a história expõe relações entre os diversos domínios do conhecimento matemático. Nas palavras de D'Ambrosio (1999, p. 97):

> As ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber.

Com a integração da história como componente metodológico, garantimos outras possibilidades de análise dos conteúdos, da notação e da terminologia, podendo estabelecer conexões entre o que se ensinou, o que se ensina e o que se pretende (deseja) ensinar em termos de conhecimento matemático em nossas escolas. Um conhecimento que frequentemente é considerado desconexo a realidade sociocultural e política, e seus estudantes considerados alienados ou sonhadores.

De fato, a história da Matemática pode esclarecer a fragilidade de tal suposição, uma vez que, em acordo com Fauvel e Maanem (2000), ela é vista como uma forma de

Revista Cocar
Programa de Pós-Graduação em Educação
da Universidade do Estado do Pará

combate à rejeição da Matemática, que aumenta a participação do alunado, melhorando o acesso à aprendizagem.

Mendes (2001) traça algumas considerações sobre como pode a história da Matemática contribuir para o ensino de Matemática. Buscando na história fatos e descobertas que provoquem uma inter-relação de vários conceitos matemáticos, ele garante os elementos para uma abordagem metodológica em sala de aula.

> A Matemática como qualquer área do conhecimento humano, tem seu desenrolar evolutivo capaz de caracterizá-la como uma ciência que também se desenvolve a partir de sua própria história. Desse modo podemos buscar nessa história fatos, descobertas e revoluções que nos mostrem o caráter criativo do homem quando se dispõe a elaborar e disseminar a ciência matemática no seu meio sociocultural. (MENDES, 2001, p. 18)

Assim, incluir a história da matemática no ensino se faz uma alternativa metodológica que começa ao despertar o interesse pelo assunto e se fundamenta em uma expectativa tecnológica, com a elaboração e utilização de atividades para o ensino de Matemática.

> Temos então, uma forma de estimular em sala de aula o espírito investigativo dos alunos, que são as fontes históricas. Assim, com a utilização dos aspectos históricos na atividade de ensino, busca-se não só motivar o alunado, mas garantir o processo de construção do conhecimento. O estudo de fontes do passado também é importante para o ensino em virtude das vantagens que oferece ao professor, pois pode conduzir o aluno à (re) construção das ideias presentes nos livros didáticos atuais, a partir da riqueza do tratamento das fontes originais. (BRANDEMBERG, 2007, p. 11)

Aos colegas professores, através de alguns extratos em língua materna, oferecemos a oportunidade de (re) conhecer os conteúdos históricos, e atuar de forma ativa na resolução de problemas (equações), através dos métodos discutidos e dos exemplos (atividades) apresentados, possibilitando maior flexibilidade na escolha dos métodos (processos) de resolução, a serem utilizados no momento de sua prática docente.

Referências

BEKKEN, O. B. **Equações de Ahmes até Abel**. Tradução: José Paulo Quinhões Carneiro. Rio de Janeiro, RJ: GEPEM, 1994.

BRANDEMBERG, J. C. Usando a História da Matemática para Ensinar Equações Algébricas. In Encontro de Pesquisa Educacional Norte e Nordeste, 18, 2007. **Anais.....** Maceió, AL p:1-12.

______. **Uma Abordagem Histórica da Resolução da Equação do 4º grau**. Coleção Educação Matemática na Amazônia – Coleção III – V. 2. Belém: SBEMPA, 2011.

_____; MENDES, I. A. Problemas Históricos e Ensino de Matemática. In: Encontro Paraense de Educação Matemática 3, 2005. **Anais.....** . Belém. P. 1-12.

_____. **Uma Análise Histórico-epistemológica do Conceito de Grupo.** São Paulo, SP: Livraria da Física, 2010.

D'AMBROSIO, U. A História da Matemática: questões historiográficas e políticas reflexos na Educação Matemática. Em BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo, SP: UNESP, 1999.

DESCARTES, R. **La Géometrie**. Paris, 1637.

ESTRADA, M. F. et al. **História da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

EULER, L. **Elements of Algebra**. EUA: Springer-Verlag, 1972.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, SP: Unicamp, 2002.

FAUVEL, J. MAANEM, J. V. **History in mathematics education**. EUA: Kluwer academic publishers, 2000.

GARBI, G. G. **O Romance das Equações Algébricas**. São Paulo, SP: Makron Books, 1997.

GILLINGS, R. J. **Mathematics in the Time of the Pharaohs**. New York: Dover, 1972.

LAGRANGE, J. L. **Lectures on Elementary Mathematics**. New York: Dover, 2008.

Revista Cocar
Programa de Pós-Graduação em Educação
da Universidade do Estado do Pará

MENDES, I. A. **O uso da história no ensino da Matemática reflexões teóricas e experiências**. Belém, PA: Eduepa, 2001.

STRUIK, D. J. **A Concise History of Mathematics**. New York: Dover, 1987.

WAERDEN, B. L. van der. **A history of Algebra** – from Al-Khowarism to Emmy Noether. Berlin: Springer Verlag, 1985.

VELOSO, J. M. M. **As origens da civilização, da escrita e da Matemática**. I Workshop de difusão e popularização da ciência e da tecnologia na Amazônia - UFAM. Manaus, AM: 2007.

Sobre o autor

João Cláudio Brandemberg – ICEN/UFPA.E-mail. brand@ufpa.br

Recebido em: 23/09/2016

Aceito para publicação em: 15/10/2016